Ejercicio 1. (1,25 puntos)

Calcula a y b para que el polinomio $p(x)=x^3+6x^2+ax+b$ sea divisible por $\left(x^2-4\right)$.

Solución:

$p(x)=x^3+6x^2+ax+b$

$p(x)$ *debe ser divisible entre* $\left(x^2-4\right) \Rightarrow$ *como* $x^2-4=(x+2)(x-2)$, $p(x)$ *tiene que ser divisible entre* $(x+2)$ *y* $(x-2)$.

$p(-2)=0 \Rightarrow (-2)^3+6(-2)^2+a(-2)+b=0 \Rightarrow -8+24-2a+b=0 \Rightarrow -2a+b=-16$

$p(2)=0 \Rightarrow (2)^3+6(2)^2+a(2)+b=0 \Rightarrow 8+24+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-32$

$\begin{cases}-2a+b=-16\\ 2a+b=-32\end{cases} \Rightarrow$ *sumando ambas ecuaciones obtenemos* $2b=-48 \Rightarrow b=-24$ *y, en consecuencia,* $a=-4$

Por tanto el polinomio será $p(x)=x^3+6x^2-4x-24$

Ejercicio 2. (1,25 puntos)

- Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real el siguiente conjunto de números: $|2x-1|\geq 5$
-
- Efectúa y simplifica: $\sqrt{4+\frac{14}{9}}-\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

Solución:

$a)$ $|2x-1|\geq 5$

Los números cuyo valor absoluto es mayor o igual que 5, *son los mayores o iguales que* 5 *y los menores o iguales que* -5.

$$\text{Entonces}\ \begin{cases}2x-1\geq 5 \Rightarrow 2x\geq 6 \Rightarrow x\geq 3 \Rightarrow x\in[3,+\infty)\\ \qquad o \\ 2x-1\leq -5 \Rightarrow 2x\leq -4 \Rightarrow x\leq -2 \Rightarrow x\in(-\infty,-2]\end{cases} \Rightarrow$$

Los números reales que cumplen la condición $|2x-1|\geq 5$ *son los pertenecientes al conjunto* $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$

$$b)\ \sqrt{4+\frac{14}{9}}-\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{50}{9}}-\sqrt{2^3}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2\cdot 5^2}}{3}-2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{10\sqrt{2}}{6}-\frac{12\sqrt{2}}{6}+\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Ejercicio 3. (3,75 puntos)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ \sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=1$ $\quad c)\ 3^{x^2-3}=9^{3x+12}$ $\quad d)\ 2\log_2 x+\log_2(x-2)=5$

$b)\ \dfrac{x^3}{x+1}+\dfrac{x-41}{x^2-1}=5-x$ $\quad d)\ 4\cdot\left(2^x+\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=33$ $\quad f)\ \log(x+1)=\log(5x-13)-\log(x-3)$

Solución:

$a)\ \sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=1$

$$\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{x-1}$$
$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$2x-1=1+x-1+2\sqrt{x-1}$$
$$x-1=2\sqrt{x-1}$$
$$(x-1)^2=\left(2\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$x^2-2x+1=4(x-1)$$
$$x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{6\pm4}{2}=\begin{cases}x=5\\x=1\end{cases}$$

Lo comprobamos y ambas soluciones son válidas.

$b)\ \dfrac{x^3}{x+1}+\dfrac{x-41}{x^2-1}=5-x\ ;\ mcm\left[(x+1),(x^2-1)\right]=(x^2-1)$

$$\frac{x^3(x-1)}{x^2-1}+\frac{x-41}{x^2-1}=\frac{(5-x)(x^2-1)}{x^2-1}$$
$$\frac{x^4-x^3+x-41}{x^2-1}=\frac{5x^2-5-x^3+x}{x^2-1}$$
$$x^4-x^3+x-41=5x^2-5-x^3+x$$
$$x^4-5x^2-36=0\quad,\ \textit{ecuación bicuadrada},\ x^2=y$$
$$y^2-5y-36=0\Rightarrow\begin{cases}y=9\\y=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=9\\ \cancel{x^2=-4}\end{cases}$$

$$\textit{Soluciones}\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}$$

$c)\ 3^{x^2-3}=9^{3x+12}$

$$3^{x^2-3}=\left(3^2\right)^{3x+12}$$
$$3^{x^2-3}=3^{6x+24}$$
$$x^2-3=6x+24$$
$$x^2-6x-27=0$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot(-27)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{6\pm12}{2}\Rightarrow$$
$$\textit{Soluciones}\begin{cases}x=9\\x=-3\end{cases}$$

$d)\ 4\cdot\left(2^x+\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=33$

$$4\cdot\left(2^x+\frac{2}{2^x}\right)=33\ ,\ \textit{hacemos el cambio de variable}\ 2^x=t$$
$$4\cdot\left(t+\frac{2}{t}\right)=33\quad\Rightarrow\quad 4t+\frac{8}{t}=33$$
$$\frac{4t^2}{t}+\frac{8}{t}=\frac{33t}{t}\quad\Rightarrow\quad\frac{4t^2+8}{t}=\frac{33t}{t}\quad\Rightarrow\ 4t^2+8=33t$$
$$4t^2-33t+8=0$$
$$t=\frac{33\pm\sqrt{(-33)^2-4\cdot4\cdot8}}{2\cdot4}=\frac{33\pm31}{8}=\begin{cases}t=8\\t=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x=2^3\\2^x=2^{-2}\end{cases}$$
$$\textit{Soluciones}\begin{cases}x=3\\x=-2\end{cases}$$

$d)\quad 2\log_2 x+\log_2(x-2)=5$

$$\log_2 x^2+\log_2(x-2)=\log_2 2^5$$
$$\log_2\left[x^2\cdot(x-2)\right]=\log_2 32$$
$$x^2\cdot(x-2)=32 \;\Rightarrow\; x^3-2x^2=32$$
$$x^3-2x^2-32=0 \quad , \quad \textit{factorizamos el polinomio}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 0 & -32 \\ 4 & & 4 & 8 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 0 \end{array}$$

$$x^3-2x^2-32=(x-4)(x^2+2x+8) \quad \Rightarrow$$
$$(x-4)(x^2+2x+8)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x^2+2x+8=0 \end{cases}$$

$x^2+2x+8=0$ *no tiene soluciones reales*

Solución $x=4$

$f)\quad \log(x+1)=\log(5x-13)-\log(x-3)$

$$\log(x+1)=\log\left(\frac{5x-13}{x-3}\right) \quad \Rightarrow \quad x+1=\frac{5x-13}{x-3}$$

$$(x+1)(x-3)=5x-13$$
$$x^2-3x+x-3=5x-13$$
$$x^2-7x+10=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 10}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$$

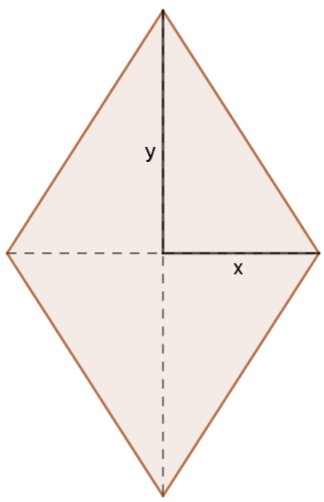
Comprobamos las posibles soluciones y vemos que $x=2$ no es válida porque no existen logaritmos de números negativos.

Solución $x=5$

Ejercicio 4. (1,25 puntos)

El lado de un rombo mide 10 cm y su área 96 cm². Calcula la medida de sus diagonales.

Solución:



Si llamamos $2x$, $2y$ al valor de las dos diagonales del rombo, tenemos:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 \\ \dfrac{(2x)\cdot(2y)}{2}=96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x\cdot y=\dfrac{96\cdot 2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x\cdot y=48 \;\rightarrow\; y=\dfrac{48}{x} \end{cases}$$

$$x^2+\left(\frac{48}{x}\right)^2=100 \;\Rightarrow\; x^2+\frac{2304}{x^2}=100 \;\Rightarrow\; x^4+2304=100x^2$$

$$x^4-100x^2+2304=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{100\pm\sqrt{(-100)^2-4\cdot 2304}}{2}=\frac{100\pm 28}{2}$$

$$\begin{cases} x^2=64 \;\Rightarrow\; x=8\,cm \\ x^2=36 \;\Rightarrow\; x=6\,cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} si\;\; x=8cm \;\Rightarrow\; y=6cm \\ si\;\; x=6cm \;\Rightarrow\; y=8cm \end{cases}$$

En cualquier caso, la diagonal mayor mide 16 cm y la diagonal menor 12 cm.

Ejercicio 5. (1,25 puntos)

– Calcula el valor de la expresión: $\log_a\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^5}}\right)^2$

– Encuentra a qué número debemos elevar 5 para obtener como resultado 10.

Solución:

$$a)\quad \log_a\left(\frac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^5}}\right)^2=\log_a\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{4}}}\right)^2=\log_a\left(a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{5}{4}}\right)^2=\log_a\left(a^{-\frac{5}{12}}\right)^2=\log_a a^{-\frac{5}{6}}=-\frac{5}{6}$$

También se pueden aplicar las propiedades de los logaritmos.

$$\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^5}}\right)^2=2\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^5}}\right)=2\left(\log_a\left(\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}\right)-\log_a\left(\sqrt[4]{a^5}\right)\right)=2\left(\log_a\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^4\cdot a}}\right)-\log_a\left(\sqrt[4]{a^5}\right)\right)=$$

$$=2\left(\log_a\sqrt[6]{a^5}-\log_a\sqrt[4]{a^5}\right)=2\left(\frac{5}{6}\log_a a-\frac{5}{4}\log_a a\right)=2\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{4}\right)=2\left(-\frac{5}{12}\right)=-\frac{5}{6}$$

b) Buscamos un número x tal que $5^x=10\ \Rightarrow$ *por la definición de logaritmo,* $x=\log_5 10$*, que es el mismo número que* $\dfrac{1}{\log 5}$ $\Rightarrow$ *Tenemos que* $5^{\log_5 10}=10$; $5^{\frac{1}{\log 5}}=10$ *o* $5^{\frac{\log_a 10}{\log_a 5}}=10\quad \forall a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Ejercicio 6. (1,25 puntos)

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a)\quad \frac{3x-2}{3}-\frac{x-1}{2}+1>\frac{1-2x}{3}-7x$$

$$b)\quad x+4\le\frac{6}{x-1}$$

Solución:

$$a)\quad \frac{3x-2}{3}-\frac{x-1}{2}+1>\frac{1-2x}{3}-7x$$

$$\frac{2(3x-2)}{6}-\frac{3(x-1)}{6}+\frac{6}{6}>\frac{2(1-2x)}{6}-\frac{6\cdot 7x}{6}\quad\Rightarrow\quad \frac{2(3x-2)-3(x-1)+6}{6}>\frac{2(1-2x)-42x}{6}\quad\Rightarrow$$

$$6x-4-3x+3+6>2-4x-42x\quad\Rightarrow\quad 6x-3x+4x+42x>2+4-3-6\quad\Rightarrow\quad 49x>-3\quad\Rightarrow\quad x>-\frac{3}{49}$$

$$Solución:\quad x\in\left(-\frac{3}{49}\ ,\ +\infty\right)$$

b) $x+4\le\dfrac{6}{x-1}$

$$x+4-\frac{6}{x-1}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(x+4)(x-1)-6}{x-1}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2-x+4x-4-6}{x-1}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2+3x-10}{x-1}\le 0$$

Factorizamos el polinomio $x^2+3x-10=(x+5)(x-2) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{(x+5)(x-2)}{x-1}\le 0$ *y analizamos el signo de la fracción.*

	$(-\infty\ ,-5)$	-5	$(-5\ ,1)$	1	$(1\ ,2)$	2	$(2\ ,+\infty)$
$(x+5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(x+5)\cdot(x-2)}{(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Solución: $x\in(-\infty\ ,\ -5]\cup(1\ ,2]$