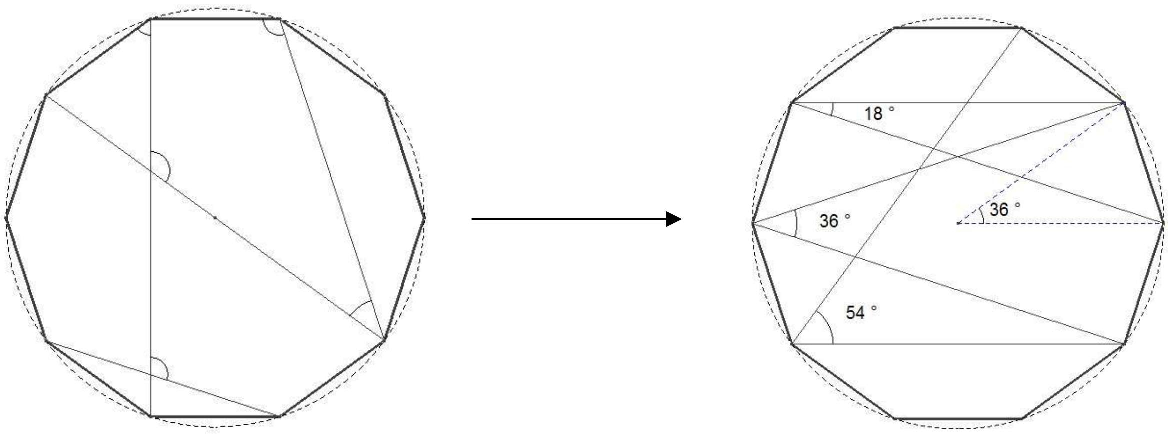
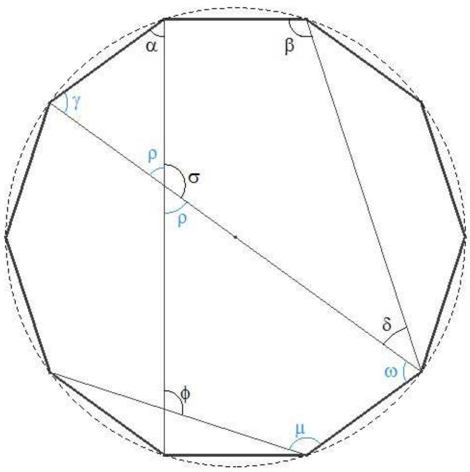
Ejercicio 1.

En el siguiente decágono regular hemos trazado algunas diagonales. Calcula el valor de los cinco ángulos marcados.





En un decágono regular, el ángulo central que abarca un lado mide $\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$

Un ángulo inscrito que abarca un lado medirá $\frac{36^\circ}{2}=18^\circ \Rightarrow$ *un ángulo inscrito que abarca n lados medirá* $n\cdot 18^\circ\ (n\le 8)$.

El ángulo α *abarca tres lados* $\Rightarrow\ \alpha=3\cdot 18^\circ\ \Rightarrow\ \alpha=54^\circ$

El ángulo γ *abarca cuatro lados* $\Rightarrow\ \gamma=4\cdot 18^\circ\ \Rightarrow\ \gamma=72^\circ$

El ángulo $\rho=180^\circ-\alpha-\gamma$*, al formar parte del mismo triángulo* $\Rightarrow\ \rho=54^\circ$

El ángulo $\sigma=180^\circ-\rho\ \Rightarrow\ \sigma=126^\circ$

El ángulo β *abarca seis lados* $\Rightarrow\ \beta=6\cdot 18^\circ\ \Rightarrow\ \beta=108^\circ$

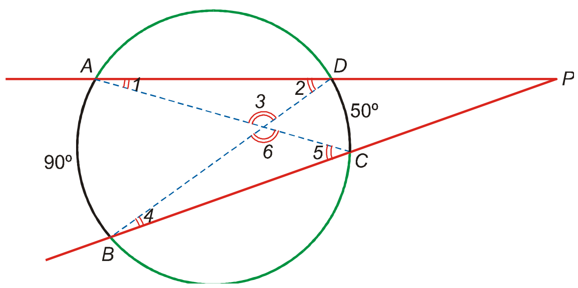
El ángulo δ *abarca dos lados* $\Rightarrow\ \delta=2\cdot 18^\circ\ \Rightarrow\ \delta=36^\circ$

El ángulo ω *abarca cuatro lados* $\Rightarrow\ \omega=4\cdot 18^\circ\ \Rightarrow\ \omega=72^\circ$

El ángulo μ *abarca siete lados* $\Rightarrow\ \mu=7\cdot 18^\circ\ \Rightarrow\ \mu=126^\circ$

El ángulo $\phi=360^\circ-\rho-\omega-\mu$*, al formar parte del mismo cuadrilátero* $\Rightarrow\ \phi=108^\circ$

Halla el valor de los seis ángulos señalados en la figura:



$\hat{1}$ *es un ángulo inscrito cuyo ángulo central correspondiente es de* $50^\circ\ \Rightarrow\ \hat{1}=25^\circ$

$\hat{2}$ *es un ángulo inscrito cuyo ángulo central correspondiente es de* $90^\circ\ \Rightarrow\ \hat{2}=´45^\circ$

El ángulo $\hat{3}=180^\circ-\hat{1}-\hat{2}$ *, al formar parte del mismo triángulo* $\Rightarrow\ \hat{3}=110^\circ$

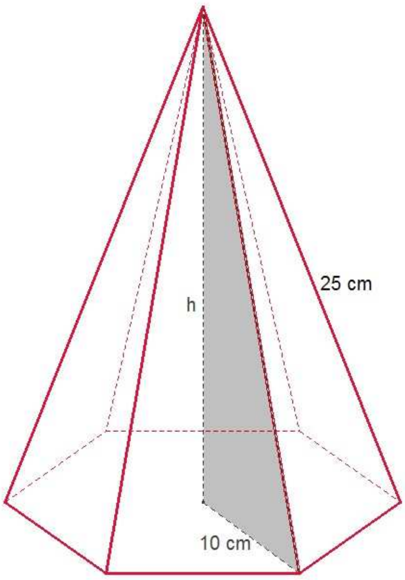
$\hat{4}$ *es un ángulo inscrito cuyo ángulo central correspondiente es de* $50^\circ\ \Rightarrow\ \hat{4}=25^\circ$

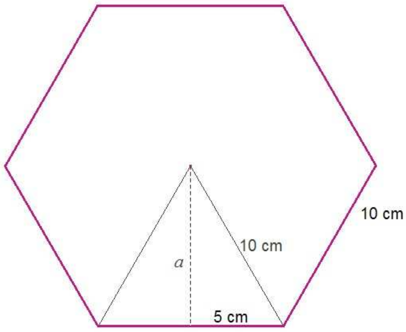
$\hat{5}$ *es un ángulo inscrito cuyo ángulo central correspondiente es de* $90^\circ\ \Rightarrow\ \hat{5}=45^\circ$

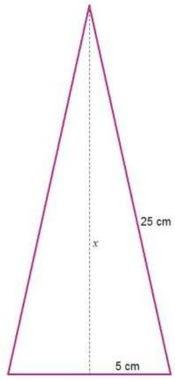
El ángulo $\hat{6}=\hat{5}$ *al ser opuestos por el vértice* $\Rightarrow\ \hat{6}=110^\circ$

Ejercicio 2.

Halla la superficie total y el volumen de una pirámide hexagonal, cuyas aristas de la base miden 10 cm y las aristas laterales 25 cm.







$\boxed{\text{Base de la pirámide: hexágono regular de lado } 10\,cm}$

Dividimos el hexágono en 6 triángulos equiláteros como el de la figura y aplicamos el th. de Pitágoras:

$10^2 = 5^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 75 \Rightarrow a = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\,cm$

$A_{triángulo} = \dfrac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\ cm^2$

$A_{hexágono} = 6 \cdot A_{triángulo} = 150\sqrt{3}\ cm^2$

$\boxed{\text{Caras laterales: 6 iguales}}$

Triángulo isósceles: aplicamos el th. de Pitágoras:

$25^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 600$

$x = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}\,cm$

$A_{triángulo} = \dfrac{10 \cdot 10\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{6}\ cm^2$

$A_{lateral} = 6 \cdot A_{triángulo} = 300\sqrt{6}\ cm^2$

Superficie exterior de la pirámide = Área de la base + Área lateral

$S_{total} = 150\sqrt{3} + 300\sqrt{6} = 150\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\right)\ cm^2 \Rightarrow S_{total} \simeq 994,65\ cm^2$

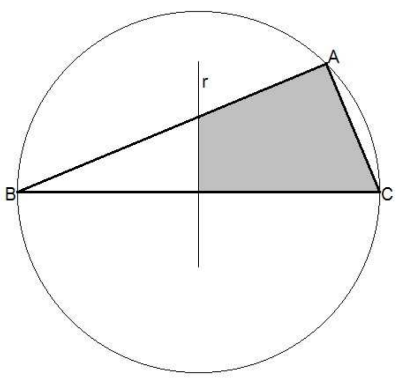
$Volumen_{pirámide} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$; *tenemos el triángulo rectángulo de hipotenusa 25 y catetos 10 y h. Aplicamos el th. de Pitágoras:*

$25^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow 625 = 100 + h^2 \Rightarrow h^2 = 525 \Rightarrow h = \sqrt{525} = 5\sqrt{21}\ cm$

$V_{pirámide} = \dfrac{1}{3} \cdot 150\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{21} = \dfrac{750\sqrt{63}}{3} = \dfrac{750 \cdot 3\sqrt{7}}{3} = 750\sqrt{7}\ cm^3 \Rightarrow V_{pirámide} \simeq 1984,31\ cm^3$

Ejercicio 3.

El triángulo *ABC* está inscrito en una circunferencia de tal forma que el lado $\overline{BC}$ es un diámetro. Sabiendo que la recta r es la mediatriz del lado $\overline{BC}$, y que $\overline{AB} = 12\ cm$ y $\overline{AC} = 5\ cm$. Calcula el área del cuadrilátero sombreado.

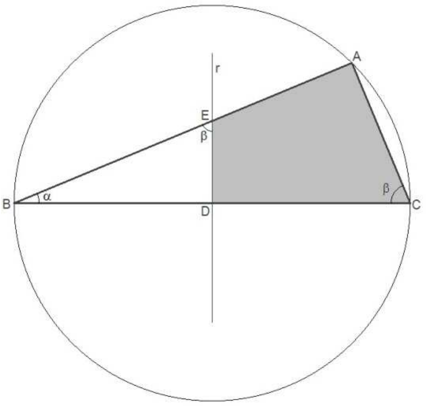


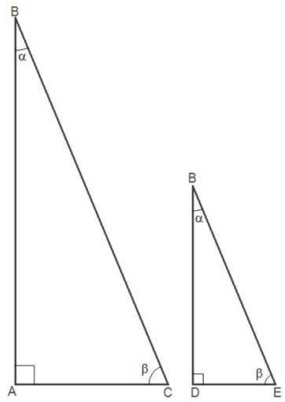
El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y $\overline{BC}$ es un diámetro $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ABC es un triángulo rectángulo con $\hat{A} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ aplicando el th. de pitágoras:

$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{BC}\right)^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow \left(\overline{BC}\right)^2 = 169 \Rightarrow \overline{BC} = 13\ cm$

La mediatriz r divide el lado $\overline{BC}$ en dos partes iguales de 6,5 cm cada una, y al triángulo ABC en un cuadrilátero y otro triángulo semejante a él.





Colocando los triángulos semejantes en la misma posición, tenemos la siguiente relación de proporcionalidad :

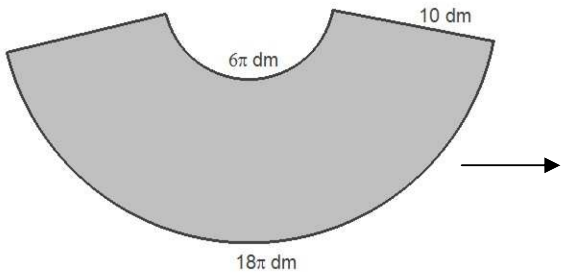
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{6{,}5} = \frac{5}{12} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{5 \cdot 6{,}5}{12} \simeq 2{,}71\ cm$$

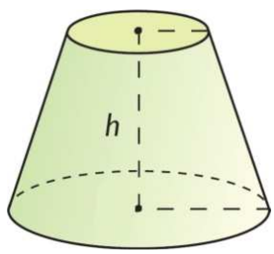
$$A_{cuadrilátero} = A_{triángulo\,mayor} - A_{triángulo\,menor} \Rightarrow A_{cuadrilátero} = \frac{5 \cdot 12}{2} - \frac{2{,}71 \cdot 6{,}5}{2} \Rightarrow A_{cuadrilátero} = 21{,}19\ cm^2$$

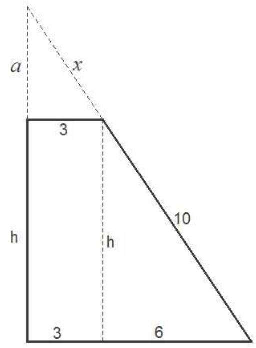
Ejercicio 4.

Con una pieza como la que se muestra se quiere construir un cubo con forma de tronco de cono, al que se le añadirá la base menor.

- ¿Qué radio debe tener la base que hay que añadir?
- ¿Qué volumen tendrá el cubo?
- ¿Cuántos m^2 de material se consumirán?







Si r es el radio de la base menor $\Rightarrow 2\pi r = 6\pi \Rightarrow r = 3\ dm$

Llamamos R al radio de la base mayor $\Rightarrow 2\pi R = 18\pi \Rightarrow R = 9\ dm$

$V_{cubo} = V_{cono\ completo} - V_{cono\ cortado} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 (h+a) - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 a$, *calculamos "h" por Pitágoras y "a" por semejanza :*

$$10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8\ dm \ ; \quad \frac{a}{3} = \frac{h}{6} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4\ dm$$

$$V_{cubo} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = \frac{\pi \cdot \left(9^2 \cdot 12 - 3^2 \cdot 4\right)}{3} = \frac{\pi \cdot 936}{3} \Rightarrow V_{cubo} = 312\pi\ dm^3 \simeq 980{,}2\ litros \ \ (gran\ cubo)$$

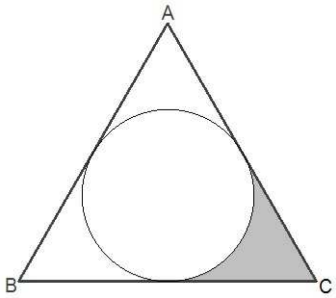
Para hallar la superficie del tronco de cono : $S = A_{lateral} + A_{base} = \frac{(6\pi + 18\pi) \cdot 10}{2} + \pi \cdot 3^2 \Rightarrow S = 129\pi\ dm^2 \simeq 4{,}05\ m^2$

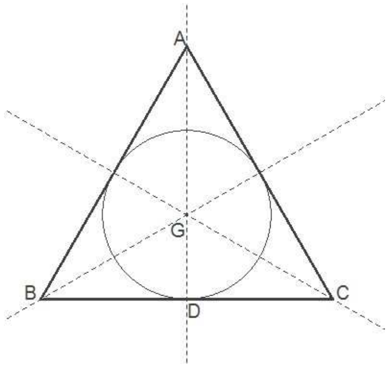
También podemos calcular el área lateral : $A_{lateral} = A_{sector\ grande} - A_{sector\ pequeño} = \pi \cdot R \cdot (10 + x) - \pi \cdot r \cdot x$, *como* $x = 5\ dm$

$$A_{lateral} = \pi \cdot 9 \cdot 15 - \pi \cdot 3 \cdot 5 = 120\pi\ dm^2 \Rightarrow S = 120\pi + 9\pi = 129\pi\ dm$$

Ejercicio 5.

El triángulo ABC es equilátero de lado 10 cm. Construida su circunferencia inscrita, se pide el área de la zona sombreada.





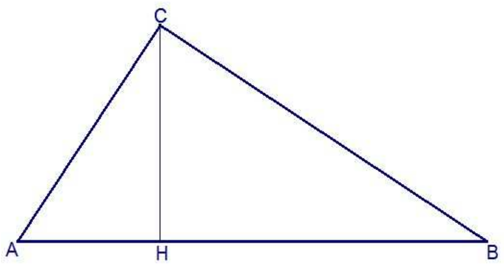
El centro de la circunferencia inscrita a un triángulo se obtiene como corte de las bisectrices de los ángulos, como el triángulo es equilátero, esas bisectrices coinciden con las mediatrices, alturas y medianas $\Rightarrow$ *el incentro, circuncentro, ortocentro y baricentro son el mismo punto y el radio de la cirunferencia inscrita será la distancia del centro al punto medio de un lado* $\Rightarrow$ $r=\overline{GD}$. *Como G es el baricentro* $\Rightarrow$ $\overline{GD}=\frac{1}{3}\cdot\overline{AD}$

$$\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{BD}\right)^2+\left(\overline{AD}\right)^2 \Rightarrow 10^2=5^2+\left(\overline{AD}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{AD}\right)^2=75 \Rightarrow \overline{AD}=5\sqrt{3} \quad \textit{entonces} \quad \overline{GD}=\frac{1}{3}\cdot 5\sqrt{3} \quad y \quad r=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

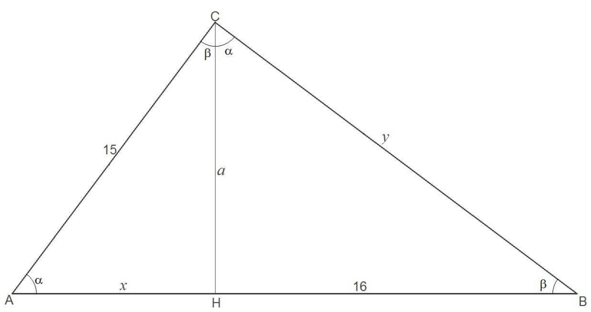
Ahora el área sombreada será $A=\dfrac{A_{triángulo}-A_{circulo}}{3} \Rightarrow A=\dfrac{\dfrac{10\cdot 5\sqrt{3}}{2}-\pi\cdot\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}{3}=\dfrac{25\sqrt{3}-\pi\cdot\dfrac{25}{3}}{3}=\dfrac{75\sqrt{3}-25\pi}{9} \Rightarrow A\simeq 5{,}71\ cm^2$

Ejercicio 6.

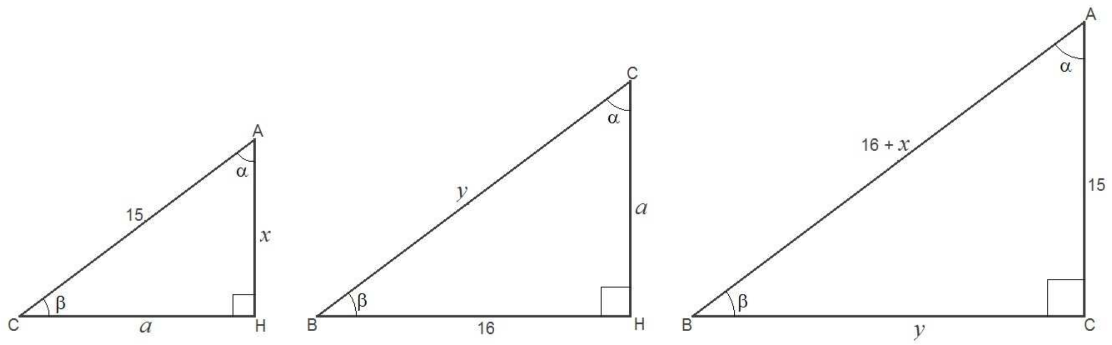
En el triángulo rectángulo ABC de hipotenusa AB, tenemos que AC=15. Si la altura CH divide a AB en los segmentos AH y HB con HB=16, calcula el área del triángulo ABC.



Como el triángulo ABC es rectángulo $\Rightarrow$ *los triángulos ABC, ACH y CBH son semejantes, como se puede apreciar en el siguiente dibujo, ya que los ángulos* α *y* β *son complementarios* $\left(\alpha+\beta=90^\circ\right)$ *y tienen ángulos iguales.*



Colocamos los triángulos ABC, ACH y CBH en la misma posición y marcamos los lados y los ángulos para evitar confusiones:



Aplicando el teorema de Thales obtenemos la siguiente proporción:

$$\frac{15}{x}=\frac{16+x}{15} \Rightarrow 15^2 = x(16+x) \Rightarrow 225 = 16x + x^2 \Rightarrow x^2+16x-225=0$$

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot(-225)}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{1156}}{2}=\frac{-16\pm 34}{2}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=9}\\ \cancel{x=-25}\end{cases}$$ *, una vez encontrado el valor x, buscamos el de a.*

$$\frac{a}{16}=\frac{9}{a} \Rightarrow a^2=144 \Rightarrow \boxed{a=12};$$ *también podemos hallar y:* $$\frac{y}{15}=\frac{16}{12} \Rightarrow \boxed{y=20}$$

Entonces el área del triángulo valdrá: $A=\frac{25\cdot 12}{2}=150\ u^2$ *o* $A=\frac{15\cdot 20}{2}=150\ u^2$