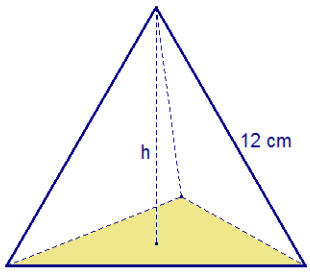
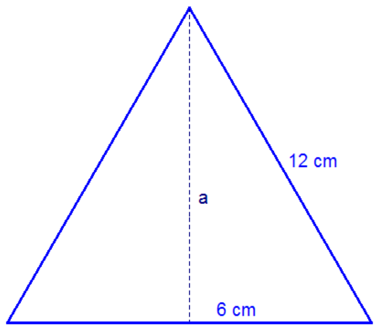
Ejercicio 1.

Calcula el volumen y la superficie total de un tetraedro regular de 12 cm de arista:



Solución:

El tetraedro es el poliedro regular de 4 *caras. Sus caras son triángulos equiláteros de lado* 12 *cm.*

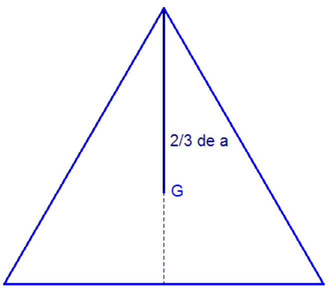


Calculamos el área de uno de esos triángulos:
Como es un triángulo equilátero, cada altura pasa por el punto medio del lado opuesto. Entonces tenemos un triángulo rectángulo en el que:

$12^2 = 6^2 + a^2 \;\Rightarrow\; a^2 = 144 - 36 \;\Rightarrow\; a^2 = 108 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ cm$

Entonces $A_{Triángulo} = \dfrac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\ cm^2$

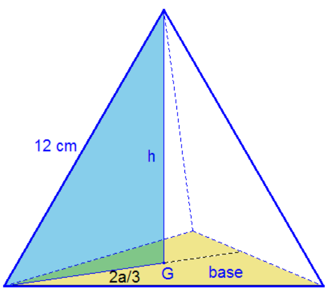
$S_{Tetraedro} = 4 \cdot A_{Triángulo} = 4 \cdot 36\sqrt{3} \;\Rightarrow\; S_{Tetraedro} = 144\sqrt{3}\ cm^2$



El volumen del tetraedro es $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$, *siendo h la altura del tetraedro.*

La altura de un tetraedro es la distancia desde un vértice hasta la cara opuesta. Es decir, la longitud del segmento de extremos un vértice y el baricentro de la cara opuesta a dicho vértice.

Para calcular esta altura h, tomaremos el triángulo rectángulo de hipotenusa la arista del tetraedro y, catetos h *y* $\dfrac{2}{3}a$, *donde a es la altura (y mediana) de una cara.*



Así, $\dfrac{2}{3}a = \dfrac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,cm \;\Rightarrow$ *tenemos que* $12^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + h^2 \;\Rightarrow\; 144 = 48 + h^2$

$\Rightarrow\; h^2 = 96 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}\ cm$

$V_{Tetraedro} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \left(36\sqrt{3}\right) \cdot \left(4\sqrt{6}\right) = 48\sqrt{18} = 144\sqrt{2}\ cm^3 \;;\; V = 144\sqrt{2}\ cm^3$

Ejercicio 2.

Un vaso cilíndrico, de 8 cm de diámetro, contiene 25 cl de refresco. Añadimos unos cubitos de hielo y el nivel del refresco sube 3 cm.

- ¿Qué volumen de hielo hemos añadido?
- Si el vaso tiene una altura de 12 cm, ¿qué cantidad de refresco podríamos agregar sin que se derramase?

Suponemos que las medidas del vaso son interiores.

Solución:

Al añadir unos cubitos de hielo, el nivel del refresco sube $3\,cm \Rightarrow$ *el volumen de los cubitos equivale al de un cilindro de diámetro* $8\,cm$ *y altura* $3\,cm$.

$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad V_{hielo} = 48\pi\ cm^3$

Como el vaso es un cilindro de $4\,cm$ *de radio y* $12\,cm$ *de altura, tiene un volumen (capacidad) total:*

$V_{vaso} = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 192\pi\ cm^3$

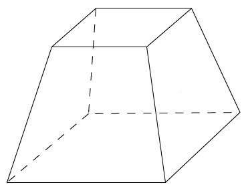
Si a ese volumen le quitamos los $48\pi\,cm^3$ *del hielo y los* $25\,cl$ *de refresco, nos queda el volumen que aún está libre.*

$25\,cl = 250\,cm^3 \quad \Rightarrow V_{libre} = 192\pi - 48\pi - 250 = 202,39\ cm^3$

Aún podríamos añadir al vaso 202 ml de refresco.

Ejercicio 3.

Calcula el volumen y la superficie total de un tronco de pirámide de base cuadrada y medidas: arista de la base mayor 28 cm, arista de la base menor 12 cm, arista lateral 17 cm.

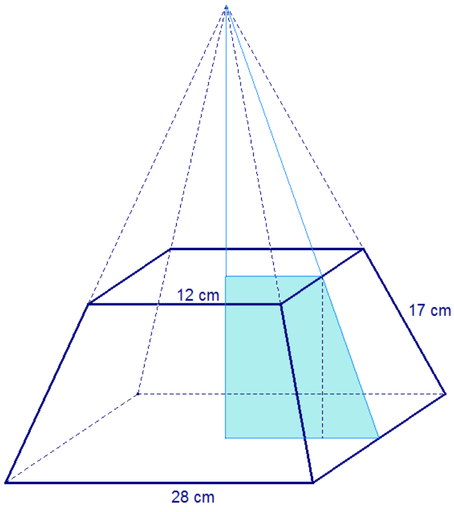


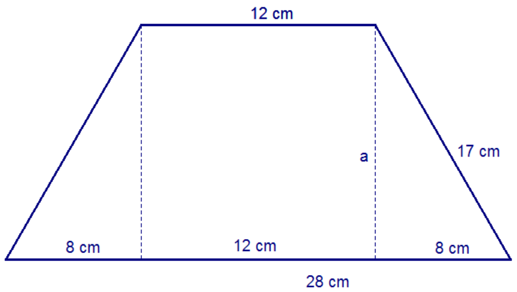
Solución:

La situación es aproximadamente la de la figura adjunta:
El tronco de pirámide lo obtenemos cortando una pirámide con un plano paralelo a la base.

La superficie del tronco la calculamos sumando las áreas de sus caras, tenemos dos cuadrados, uno de lado 28 cm y otro 12 cm, y cuatro caras laterales que son trapecios isósceles.

Para el volumen calcularemos el de la pirámide completa, al que restaremos el de la pirámide cortada. Para ello tenemos las bases de ambas pirámides pero debemos encontrar sus alturas.





Calculamos la altura del trapecio en el triángulo rectángulo:

$$a^2+8^2=17^2 \Rightarrow a^2+64=289 \Rightarrow a^2=225 \Rightarrow a=15\ cm$$

$$A_{trapecio}=\frac{(B+b)\cdot a}{2}=\frac{(28+14)\cdot 15}{2}=300\ cm^2$$

$$A_{lateral}=4\cdot A_{trapecio}=4\cdot 300=1200\ cm^2$$

$$A_{base\ mayor}=28^2=784\ cm^2 \quad ; \quad A_{base\ menor}=12^2=144\ cm^2$$

$$S_{tronco}=A_{lateral}+A_{base\ mayor}+A_{base\ menor} \Rightarrow S_{tronco}=2128\ cm^2$$

Para calcular el volumen del tronco de pirámide, necesitamos la altura de la pirámide completa $(y+x)$ *y la altura de la pirámide cortada* (y).

$$x^2+8^2=15^2 \Rightarrow x^2+64=225 \Rightarrow x^2=161 \Rightarrow x=12,69\ cm$$

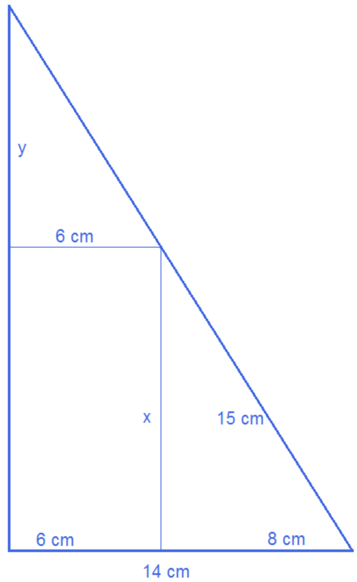
Ahora, por semejanza de triángulos:

$$\frac{y}{6}=\frac{12,69}{8} \Rightarrow y=\frac{12,69\cdot 6}{8} \Rightarrow y=9,52\ cm$$

$$V_{pirámide\ completa}=\frac{1}{3}\cdot A_{base\ mayor}\cdot(x+y)=\frac{1}{3}\cdot 784\cdot 22,21=5804,21\ cm^3$$

$$V_{pirámide\ cortada}=\frac{1}{3}\cdot A_{base\ menor}\cdot(y)=\frac{1}{3}\cdot 144\cdot 9,52=456,96\ cm^3$$

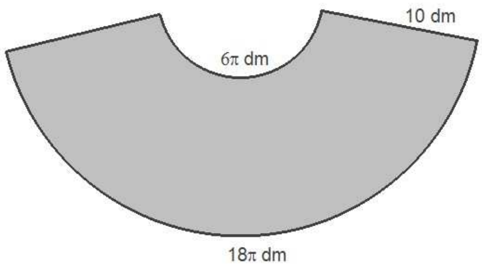
$$V_{tronco}=V_{pirámide\ completa}-V_{pirámide\ cortada} \Rightarrow V_{tronco}=5347,25\ cm^3$$



Ejercicio 4.

Con una pieza como la que se muestra se quiere construir un cubo con forma de tronco de cono, al que se le añadirá la base menor.

- ¿Qué radio debe tener la base que hay que añadir?
- ¿Qué volumen tendrá el cubo?
- ¿Cuántos m^2 de material se consumirán?

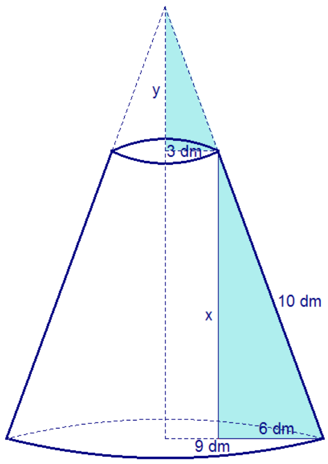


Solución:

La base que debemos añadir será un círculo de perímetro 6π *dm, cuyo radio lo obtenemos de la igualdad:*

$$2\pi r=6\pi \Rightarrow r=3\ dm$$

Para calcular el volumen del cubo (tronco de cono)*, lo colocamos apoyado sobre el círculo mayor. Entonces, necesitamos la altura del cono completo* $(y+x)$ *y la altura del cono cortado* (y).



$$x^2+6^2=10^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+36=100 \quad \Rightarrow \quad x^2=64 \quad \Rightarrow \quad x=8\ dm$$

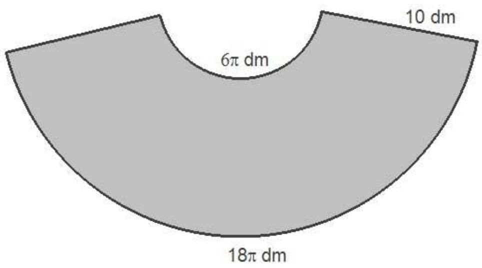
Ahora, por semejanza de triángulos:

$$\frac{y}{3}=\frac{8}{6} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3\cdot 8}{6} \quad \Rightarrow \quad y=4\ dm$$

$$V_{cono\ completo}=\frac{1}{3}\cdot A_{base\ mayor}\cdot(x+y)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9^2\cdot 12=324\pi\ dm^3$$

$$V_{cono\ cortado}=\frac{1}{3}\cdot A_{base\ menor}\cdot(y)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 4=12\pi\ dm^3$$

$$V_{cubo}=V_{cono\ completo}-V_{cono\ cortado} \quad \Rightarrow \quad V_{cubo}=312\pi\ dm^3\simeq 980\ litros$$



Calculamos la superficie total del cubo, que está compuesta por el área lateral de tronco de cono y por el área de la base que es un círculo de radio 3 dm.

$$A_{lateral}=\frac{(18\pi+6\pi)\cdot 10}{2}=120\pi\ dm^2 \quad ; \quad A_{círculo}=\pi\cdot 3^2=9\pi\ dm^2$$

$$S_{cubo}=120\pi+9\pi=129\pi\ dm^2\simeq 405,27\ dm^2$$

Entonces necesitamos, aproximadamente, $4,053\ m^2$ *de material para construir el cubo.*

Ejercicio 5.

Tenemos un cuenco con tapa, con forma de semiesfera de 30 cm de diámetro.

- Calcula, en litros, la capacidad de ese recipiente.
- Si está fabricado en aluminio, ¿cuántos m^2 de dicho material se han necesitado?

Solución:

Volumen del recipiente es el de una semiesfera de radio 15 *cm o* 1,5 *dm.*

$$V_{semiesfera}=\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi\cdot(1,5)^3=7,07\ dm^3$$

Capacidad del recipiente $\rightarrow$ 7,07 *litros*

Para fabricarlo, necesitamos una semiesfera de radio 1,5 *dm y un círculo* (*para la tapa*) *del mismo radio.*

$$A_{semiesfera}=\frac{4\pi r^2}{2}=2\pi r^2=2\pi\cdot(1,5)^2=4,5\pi\ dm^2 \quad ; \quad A_{círculo}=\pi r^2=\pi\cdot(1,5)^2=2,25\pi\ dm^2$$

$$S_{total}=4,5\pi+2,25\pi=6,75\pi\ dm^2\simeq 21,21\ dm^2$$

Entonces necesitamos, aproximadamente, $0,2121\ m^2$ *de aluminio para construir el recipiente.*