MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
Pedro de Tolosa
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

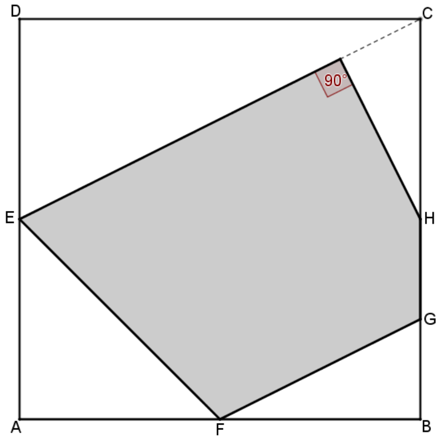
NOMBRE:

GRUPO: 3º E.S.O.- A

FECHA: 18 - mayo - 2020

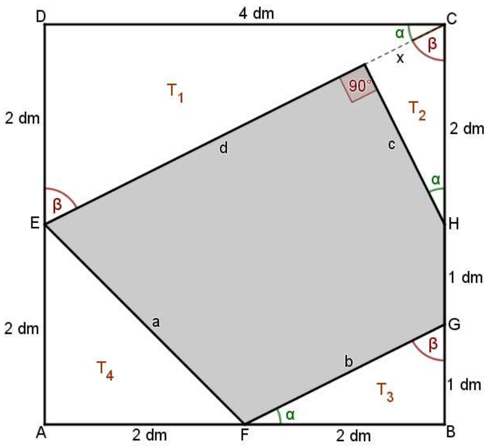
Ejercicio 1.

E, F y H son los puntos medios de los lados del cuadrado de lado 4 dm. G es el punto medio del segmento BH. Calcula el área y el perímetro del pentágono sombreado.



Justifica, con los ángulos, si el pentágono tiene dos lados paralelos.

Solución:



El triángulo T_1 *es rectángulo y su hipotenusa mide* $d+x \;\rightarrow\; (d+x)^2 = 2^2+4^2 \;\rightarrow\; d+x = 2\sqrt{5}$

El triángulo T_3 *es rectángulo y su hipotenusa mide* $b \;\rightarrow\; b^2 = 1^2+2^2 \;\rightarrow\; b=\sqrt{5}$

El triángulo T_4 *es rectángulo y su hipotenusa mide* $a \;\rightarrow\; a^2 = 2^2+2^2 \;\rightarrow\; a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Los triángulos T_1 *y* T_2 *son semejantes porque tienen ángulos iguales. Según el teorema de Tales:*

$$\frac{x}{2}=\frac{2}{2\sqrt{5}} \;\rightarrow\; x=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \frac{c}{2}=\frac{4}{2\sqrt{5}} \;\rightarrow\; c=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Los triángulos T_1 *y* T_3 *son semejantes porque cumplen la relación del teorema de Tales:*

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \;\rightarrow\; T_1 \text{ y } T_3 \text{ tienen ángulos iguales} \;\rightarrow\; b \text{ y } d \text{ son paralelos.}$$

$$A_{pentágono} = A_{cuadrado} - \left(A_{T_1}+A_{T_2}+A_{T_3}+A_{T_4}\right) = 4^2 - \left(\frac{4\cdot 2}{2} + \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{2\cdot 2}{2}\right) = 16 - \left(7+\frac{4}{5}\right)$$

$$A_{pentágono} = 8,20\ dm^2$$

$$P_{pentágono} = a+b+1+c+d = 2\sqrt{2}+\sqrt{5}+1+\frac{4}{\sqrt{5}}+\left(2\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \;\rightarrow\; P_{pentágono} \simeq 11,43\ dm$$

Ejercicio 2.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm. Sabiendo que tiene un área de 120 cm^2, plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para encontrar la medida de los catetos.

Solución:

Llamamos x e y a los dos catetos del triángulo rectángulo.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras, tenemos: $x^2+y^2=26^2$

En un triángulo rectángulo, si tomamos un cateto como base, su altura correspondientes es el otro cateto.

$$A_{triángulo}=\frac{x\cdot y}{2} \rightarrow \frac{x\cdot y}{2}=120 \rightarrow x\cdot y=240$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=676 \\ x\cdot y=240 \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvemos por sustitución}} \begin{cases} x^2+y^2=676 \rightarrow x^2+\left(\frac{240}{x}\right)^2=676 \rightarrow x^2+\frac{57600}{x^2}=676 \\ y=\frac{240}{x} \end{cases}$$

$$x^2+\frac{57600}{x^2}=676 \rightarrow \frac{x^4}{x^2}+\frac{57600}{x^2}=\frac{676x^2}{x^2} \rightarrow x^4+57600=676x^2 \rightarrow x^4-676x^2+57600=0 \text{ ecuación bicuadrada.}$$

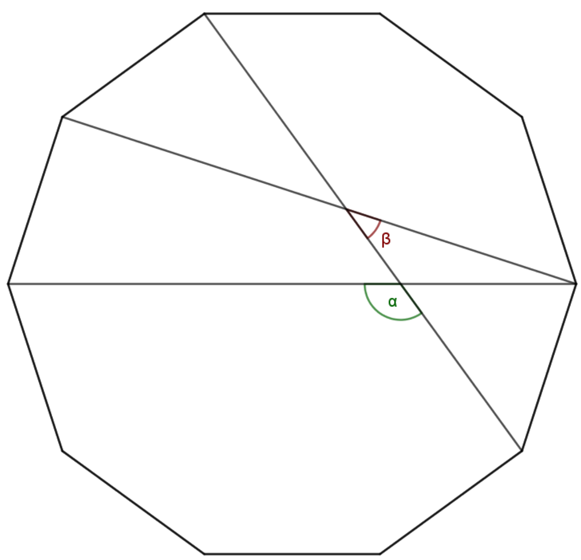
Hacemos el cambio $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$; *tenemos la ecuación* $z^2-676z+57600=0$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{676\pm\sqrt{676^2-4\cdot 1\cdot 57600}}{2\cdot 1}=\frac{676\pm 476}{2}=\begin{cases} \frac{676+476}{2}=576 \rightarrow x^2=576 \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{576}=24 \\ x=-\sqrt{576}=\cancel{-24} \end{cases} \\ \frac{676-476}{2}=100 \rightarrow x^2=100 \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{100}=10 \\ x=-\sqrt{100}=\cancel{-10} \end{cases} \end{cases}$$

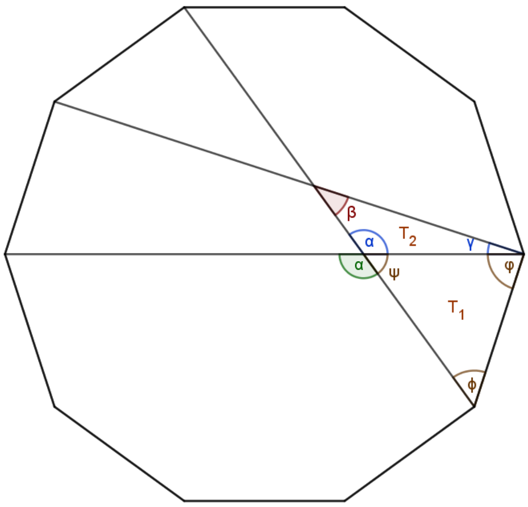
$$Si \begin{cases} x=24 \rightarrow y=\frac{240}{24}=10 \\ x=10 \rightarrow y=\frac{240}{10}=24 \end{cases} \rightarrow \text{los catetos del triángulo rectángulo miden } 10 \text{ cm y } 24 \text{ cm.}$$

Ejercicio 3.

En el siguiente decágono regular, encuentra el valor de los ángulos marcados.



Solución:



En un decágono regular, el ángulo central que abarca un lado mide $\dfrac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

Un ángulo inscrito que abarca un lado medirá $\dfrac{36^\circ}{2} = 18^\circ \;\Rightarrow\;$ *un ángulo inscrito que abarca n lados medirá* $n \cdot 18^\circ \;(n \leq 8)$.

En el triángulo T_1 *tenemos:*

El ángulo ϕ *abarca tres lados (tres arcos)* $\Rightarrow \quad \phi = 3 \cdot 18^\circ \quad \Rightarrow \quad \phi = 54^\circ$

El ángulo φ *abarca cuatro lados (cuatro arcos)* $\Rightarrow \quad \varphi = 4 \cdot 18^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = 72^\circ$

El ángulo $\psi = 180^\circ - (\phi + \varphi)$ *, al formar parte del mismo triángulo* $\Rightarrow \quad \psi = 54^\circ$

El ángulo $\alpha = 180^\circ - \psi \quad \Rightarrow \quad \alpha = 126^\circ$

En el triángulo T_2 *tenemos:*

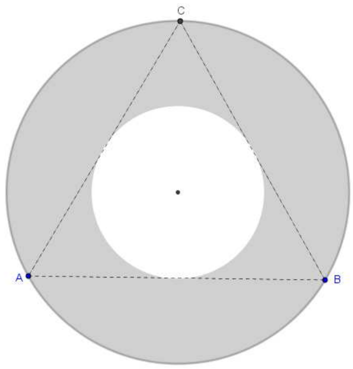
El ángulo γ *abarca un lado (un arco)* $\Rightarrow \quad \gamma = 18^\circ$

El ángulo $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$*, al formar parte del mismo triángulo* $\Rightarrow \beta = 180^\circ - 144^\circ$

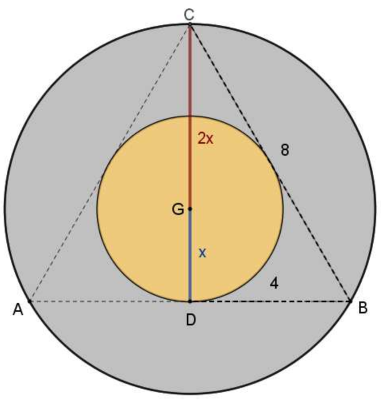
$\beta = 36^\circ$

Ejercicio 4.

Calcula el área de la corona circular sombreada, delimitada por las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo equilátero, ABC, de lado 8 cm.



Solución:



En un triángulo equilátero, incentro, circuncentro, ortocentro y baricentro coinciden.
Por tanto, el centro común de ambos círculos es el baricentro del triángulo.
La propiedad del baricentro nos dice que $\overline{GC} = 2\overline{GD}$
El radio del círculo inscrito es $r = x$ *y el radio del círculo circunscrito es* $R = 2x$

Por el teorema de Pitágoras calculamos la medida de $h = \overline{CD}$:

$h^2 + 4^2 = 8^2 \;\rightarrow\; h^2 = 64 - 16 \;\rightarrow\; h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Como $h = 3x \;\rightarrow\; x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \quad , \quad 2x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

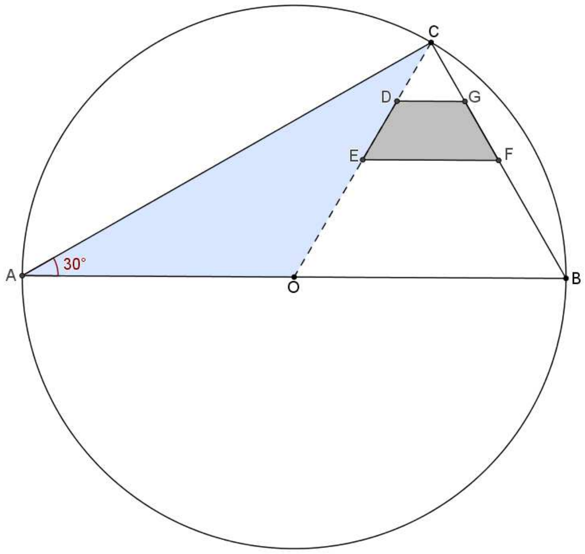
$$A_{corona\ circular} = A_{círculo\ circunscrito} - A_{círculo\ inscrito} = \pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$A_{corona\ circular} = \pi \cdot \frac{64}{3} - \pi \cdot \frac{16}{3} = \frac{48\pi}{3} \;\rightarrow\; A_{corona\ circular} = 16\pi\ cm^2$$

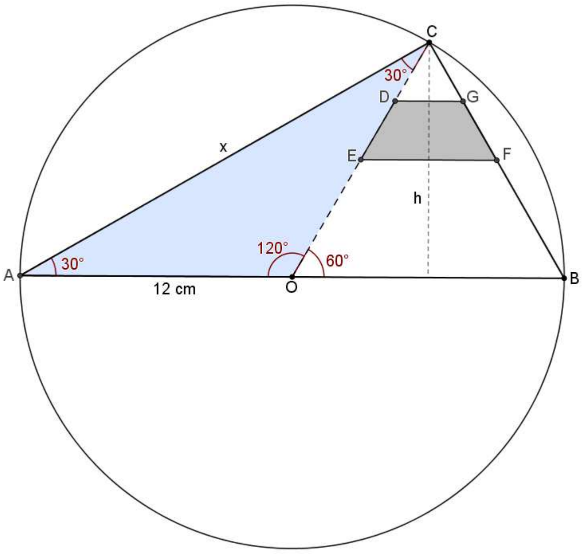
Ejercicio 5.

El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de radio 12 cm. E y F son los puntos medios de los segmentos OC y BC respectivamente. D y G son los puntos medios de los segmentos EC y FC respectivamente.

– Calcula los ángulos, al área y el perímetro del triángulo AOC (azul)
– Calcula el área del trapecio DEFG.



Solución:



El triángulo ABC es rectángulo puesto que está inscrito en una circunferencia y el lado $\overline{AB}$ es un diámetro.

El triángulo AOC es isósceles por tener dos lados iguales $\overline{OA} = \overline{OC} = 12 \rightarrow$ *también tiene dos ángulos iguales a* $30^\circ \rightarrow$ *el tercer ángulo mide* 120°.

El triángulo OBC es equilátero porque es isósceles y tiene un ángulo de $60^\circ \rightarrow \overline{BC} = 12$

En el triángulo ABC, calculamos la medida de $x = \overline{AC}$ *por el teorema de Pitágoras:*

$x^2 + 12^2 = 24^2 \rightarrow x^2 = 576 - 144 \rightarrow x = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$

$P_{triángulo\ AOC} = 12 + 12 + 12\sqrt{3} = 24 + 12\sqrt{3}\ cm \rightarrow P_{triángulo\ AOC} \simeq 44{,}8\ cm$

Como $\overline{OC}$ *es una mediana del triángulo ABC* $\rightarrow A_{triángulo\ AOC} = \dfrac{A_{triángulo\ ABC}}{2}$

$A_{triángulo\ ABC} = \dfrac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}\ cm^2 \rightarrow A_{triángulo\ AOC} = 36\sqrt{3}\ cm^2$

Si h es la altura del triángulo OBC, como $A_{triángulo\ AOC} = A_{triángulo\ OBC} \rightarrow \dfrac{12 \cdot h}{2} = 36\sqrt{3} \rightarrow h = 6\sqrt{3}$.

También podríamos haber calculado h por el teorema de Pitágoras.

Los triángulos OBC, EFC y DGC son equiláteros (semejantes) $\rightarrow \overline{EF} = 6$ *y* $\overline{DG} = 3$

Las alturas h_1 *y* h_2 *del los triángulos EFC y DGC, respectivalente, siguen la misma proporción* $\rightarrow h_1 = \dfrac{h}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}$ *y* $h_2 = \dfrac{h}{4} = \dfrac{6\sqrt{3}}{4}$

$$A_{trapecio} = A_{triángulo\ EFC} - A_{triángulo\ DGC} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} - \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow A_{trapecio} = \frac{27\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

También se podía ver así: $A_{triángulo\ EFC} = \dfrac{1}{4} A_{triángulo\ OBC} = \dfrac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ *y* $A_{triángulo\ DGC} = \dfrac{1}{4} A_{triángulo\ EFC} = \dfrac{1}{16} A_{triángulo\ OBC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$