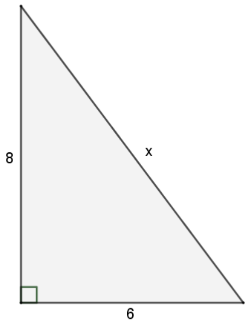
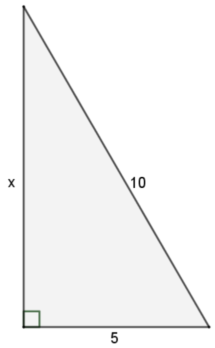
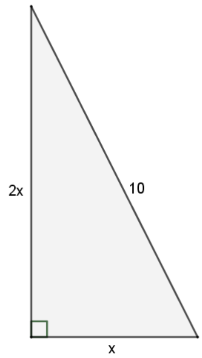
Teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1

Encuentra el valor de x en los siguientes triángulos rectángulos:





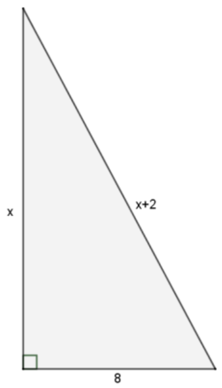


Aplicamos el teorema de Pitágoras en todos los triángulos:

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 36 + 64$$
$$x^2 = 100 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{100} = 10$$

$$x^2 + 5^2 = 10^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 25 = 100$$
$$x^2 = 75 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{75} \simeq 8,66$$

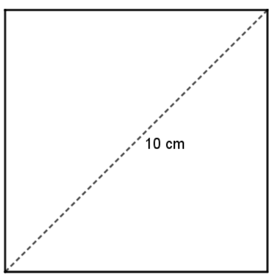
$$x^2 + (2x)^2 = 10^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x^2 = 100$$
$$5x^2 = 100 \quad \rightarrow \quad x^2 = 20 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{20} \simeq 4,47$$



$$(x+2)^2 = x^2 + 8^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = x^2 + 64 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x - x^2 = 64 - 4$$
$$4x = 60 \quad \rightarrow \quad x = \frac{60}{4} = 15$$

Ejercicio 2

Calcula el área y el perímetro del cuadrado cuya diagonal mide 10 cm.



Solución:

Llamamos x al lado del cuadrado. La diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales de hipotenusa 10 cm. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = 10^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 100 \quad \rightarrow \quad x^2 = 50 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{50} \simeq 7,07\ cm$$

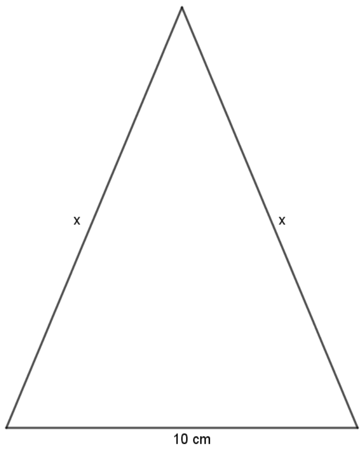
$$\text{Área de cuadrado} = x^2 \quad \rightarrow \quad A = 50\ cm^2$$
$$\text{Perímetro del cuadrado} = 4x \quad \rightarrow \quad P \simeq 28,28\ cm$$

Como el cuadrado es un rombo, también podríamos haber calculado el área como $A = \frac{d \cdot d}{2}$

$$A = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50\ cm^2$$

Ejercicio 3

En un triángulo isósceles de perímetro 36 cm, conocemos la medida del lado desigual, 10 cm. Calcula su área.

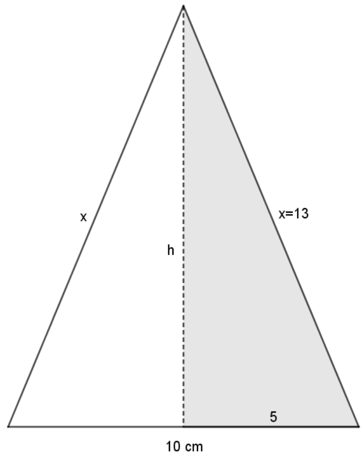


Solución:

El perímetro del triángulo es 36 cm

$x + x + 10 = 36 \rightarrow 2x = 26 \rightarrow x = 13\ cm$

La altura h divide al triángulo en dos triángulos rectángulos iguales $\longrightarrow$



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

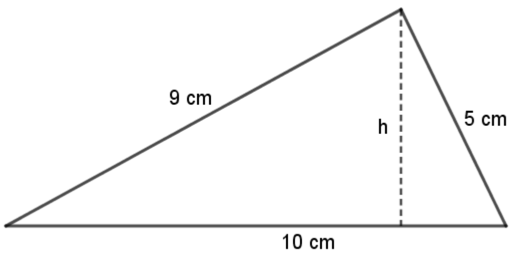
$h^2 + 5^2 = 13^2 \rightarrow h^2 = 169 - 25$

$h = \sqrt{144} = 12\ cm$

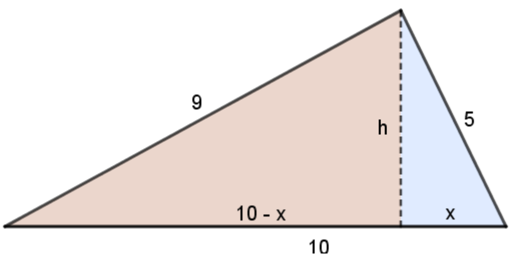
$$Área = \frac{10 \cdot 12}{2} \rightarrow A = 60\ cm^2$$

Ejercicio 4

En el siguiente triángulo, del que conocemos la medida de sus tres lados, 5 cm, 9 cm y 10 cm, calcula la altura h y el área.



Solución:



La altura h divide al triángulo en dos triángulos rectángulos.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en ambos triángulos:

$$\begin{cases} \text{En el triángulo azul} \rightarrow x^2 + h^2 = 5^2 \rightarrow x^2 + h^2 = 25 \\ \text{En el triángulo granate} \rightarrow (10-x)^2 + h^2 = 9^2 \rightarrow 100 - 20x + x^2 + h^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 25 \\ x^2 + h^2 - 20x = -19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 25 \\ -x^2 - h^2 + 20x = 19 \end{cases} +$$

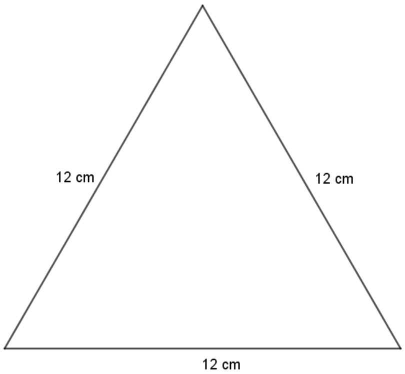
$$20x = 44 \rightarrow x = 2,2\ cm$$

$$(2,2)^2 + h^2 = 25 \rightarrow h^2 = 25 - 4,84 \rightarrow h = \sqrt{20,16} = 4,49\ cm$$

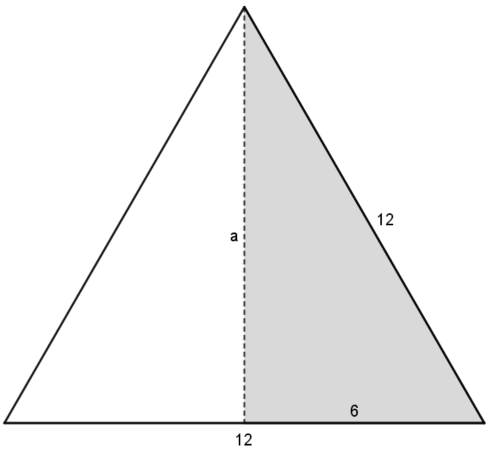
$$Área\ de\ triángulo = \frac{10 \cdot 4,49}{2} \rightarrow A = 22,45\ cm^2$$

Ejercicio 5

Dado un triángulo equilátero de lado 12 cm, calcula su área.



Solución:



En un triángulo equilátero, todas las alturas cortan a la base correspondiente en su punto medio. Una altura divide al triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos iguales.

Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, del que conocemos la hipotenusa, 12 *cm, y un cateto,* 6 *cm.*

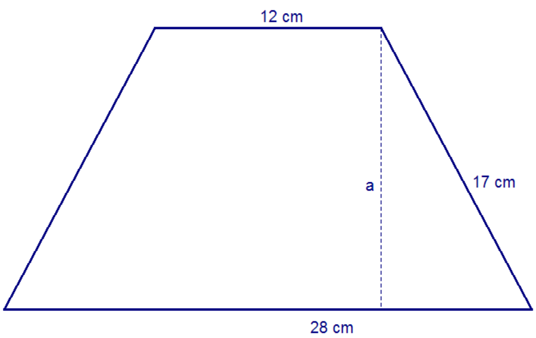
$$a^2 + 6^2 = 12^2 \quad \rightarrow \quad a^2 + 36 = 144 \quad \rightarrow \quad a^2 = 144 - 36 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{108} \simeq 10{,}39\ cm$$

Ahora que conocemos la altura del triángulo equilátero, calculamos su área:

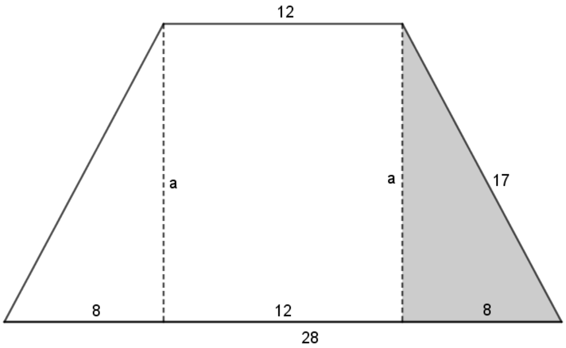
$$A = \frac{base \times altura}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{108}}{2} \quad \rightarrow \quad A \simeq 62{,}35\ cm^2$$

Ejercicio 6

Calcula el área del siguiente trapecio isósceles:



Solución:



Un trapecio tiene dos lados peralelos y si es isósceles, sus lados no paralelos son iguales. Tomamos las alturas desde los vértices de la base menor y el trapecio queda dividido en un rectángulo y dos triángulos rectángulos iguales.

Si a la base mayor la restamos la base menor, nos queda una longitud a repartir entre los dos catetos iguales de los triángulos rectángulos:

$28-12=16 \ \rightarrow \ \frac{16}{2}=8 \ \rightarrow$ *la base mayor queda dividida en un segmento de* 12 *cm y otros dos segmentos de* 8 *cm.*

Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, del que conocemos la hipotenusa, 17 *cm, y un cateto,* 8 *cm.*

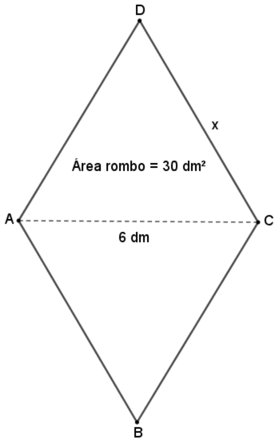
$a^2+8^2=17^2 \quad \rightarrow \quad a^2+64=289 \quad \rightarrow \quad a^2=289-64 \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{225}=15\ cm$

Ahora que conocemos la altura del trapecio, calculamos su área: $A=\frac{(Base+base)\times altura}{2}=\frac{(28+12)\cdot 15}{2} \ \rightarrow \ A=300\ cm^2$

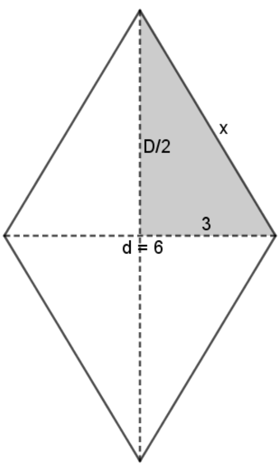
También podríamos calcular el área así: $A_{trapecio}=A_{rectángulo}+2\cdot A_{triángulo}=12\cdot 15+2\cdot\frac{8\cdot 15}{2}=180+120=300\ cm^2$

Ejercicio 7

En un rombo de área 30 dm^2, conocemos la medida de una diagonal, 6 dm. Calcula la medida del lado.



Solución:



Un rombo tiene dos diagonales perpendiculares $\rightarrow \begin{cases} \text{llamamos } d \text{ a la diagonal menor} \\ \text{llamamos } D \text{ a la diagonal mayor} \end{cases}$

Las dos diagonales se cortan en su punto medio $\rightarrow$ *dividen al rombo en* 4 *triángulos rectángulos iguales.*

$A_{rombo}=\frac{d\cdot D}{2} \quad \rightarrow \quad 30=\frac{6\cdot D}{2} \quad \rightarrow \quad 60=6\cdot D \quad \rightarrow \quad D=10\ dm$

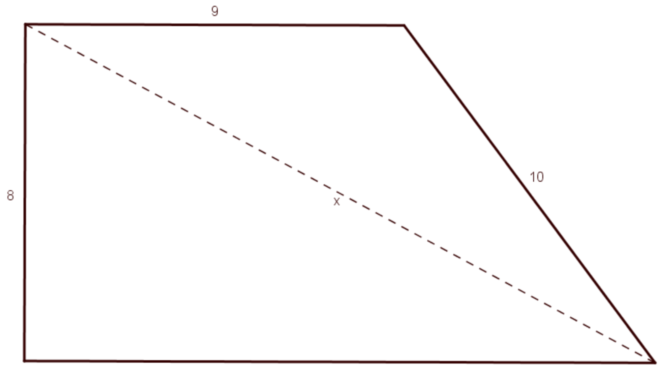
Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, del que conocemos sus catetos que son la mitad de cada diagonal, 3 *dm y* 5 *dm.*

$x^2=3^2+5^2 \quad \rightarrow \quad x^2=9+25 \quad \rightarrow \quad x^2=34 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{34}\simeq 5{,}83\ dm$

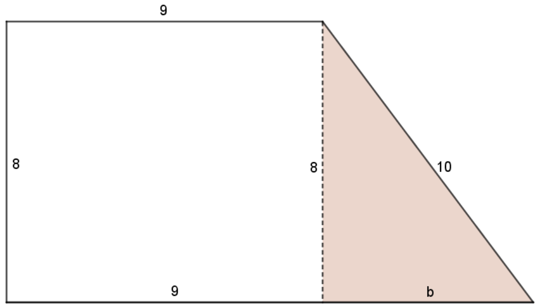
El lado del rombo mide 5,83 *dm.*

Ejercicio 8

En el siguiente trapecio rectángulo, del que conocemos la medida de tres de sus lados, 8 cm, 9 cm y 10 cm, calcula la medida de la diagonal x.



Solución:



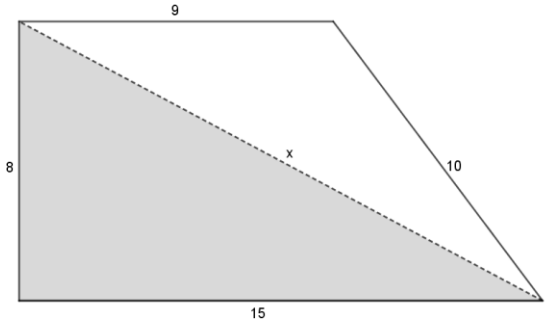
Un trapecio tiene dos lados peralelos y si es rectángulo, sus tiene dos ángulos rectos. Tomamos la altura desde el vértice de la base menor y el trapecio queda dividido en un rectángulo y un triángulo rectángulos.

Un cateto del triángulo rectángulo es la altura del trapecio y el otro, la diferencia entre las bases.

Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, del que conocemos la hipotenusa, 10 *cm, y un cateto,* 8 *cm.*

$b^2+8^2=10^2 \quad \rightarrow \quad b^2+64=100 \quad \rightarrow \quad b^2=100-64 \quad \rightarrow \quad b=\sqrt{36}=6\ cm$

Ahora ya sabemos que la base mayor mide $9+6=15\ cm$



Para calcular la diagonal x del trapecio, aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, del que conocemos sus catetos:

$x^2=8^2+15^2 \quad \rightarrow \quad x^2=64+225 \quad \rightarrow \quad x^2=289 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{289}=17\ cm$

La diagonal del trapecio mide 17 cm

Ejercicio 9

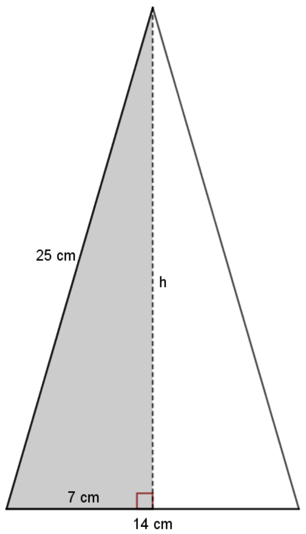
Un triángulo isósceles tiene 64 cm de perímetro y el lado desigual es 11 cm menor que cada uno de los lados iguales. Halla el área de dicho triángulo.

Solución:

Llamamos x *a la medida de los lados iguales del triángulo isósceles* $\rightarrow$ *el desigual medirá* $x-11$

El perímetro es $64\ cm \rightarrow x+x+x-11=64 \rightarrow 3x=75 \rightarrow x=\frac{75}{3} \rightarrow x=25\ cm$

Los lados iguales miden $25\ cm$ *y el lado diferente mide* $14\ cm.$



En un triángulo isósceles, la correspondiente al lado desigual, corta a la base en su punto medio.
Esa altura divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales.

Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, del que conocemos la hipotenusa, $25\ cm$*, y un cateto,* $7\ cm.$

$h^2+7^2=25^2 \rightarrow h^2+49=625 \rightarrow h^2=625-49 \rightarrow h=\sqrt{576}=24\ cm$

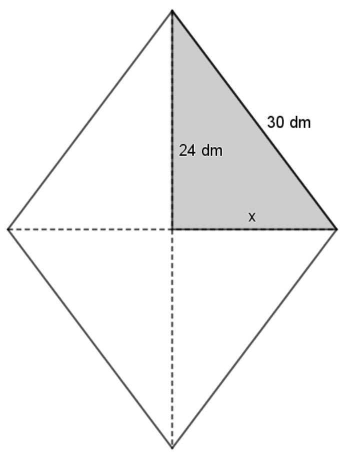
Ahora que conocemos la altura del triángulo isósceles, calculamos su área:

$A=\frac{base \times altura}{2}=\frac{14\cdot 24}{2} \rightarrow A=168\ cm^2$

Ejercicio 10

El lado de un rombo mide 30 dm, y su diagonal mayor mide 48 dm. ¿Cuánto mide la otra diagonal? Calcula el área de dicho rombo.

Solución:



En un rombo, las diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.
Esas diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales.

Aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo sombreado, del que conocemos la hipotenusa, $30\ dm$*, y un cateto,* $24\ dm$ *que es la mitad de la diagonal mayor.*
Si llamamos x *a la mitad de la diagonal menor, tenemos:*

$x^2+24^2=30^2 \rightarrow x^2+576=900 \rightarrow x^2=900-576 \rightarrow x=\sqrt{324}=18\ dm$

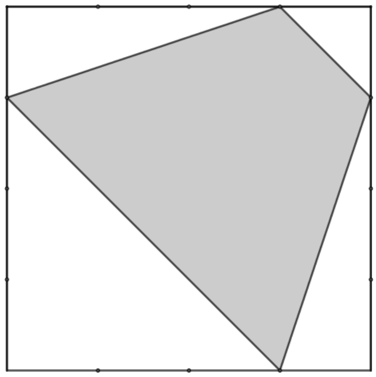
La diagonal menor mide $d=2\cdot 18=36\ dm$

Ahora que conocemos las dos diagonales del rombo, calculamos su área:

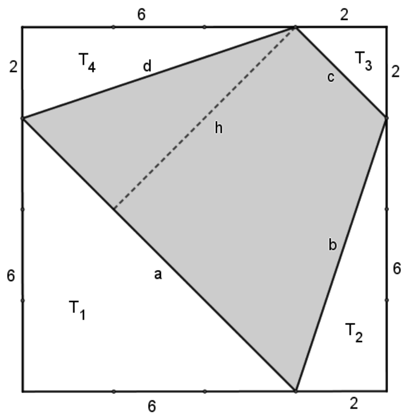
$A=\frac{D_{mayor}\times d_{menor}}{2}=\frac{48\cdot 36}{2} \rightarrow A=864\ dm^2$

Ejercicio 11

En un cuadrado de lado 8 cm, dividimos sus lados en partes iguales y trazamos un trapecio uniendo cuatro de esos puntos. Calcula el perímetro, el área y la altura de dicho trapecio.



Solución:



Los cuatro lados del trapecio son a, b, c y d. Esos lados son las hipotenusas de los triángulos rectángulos T_1, T_2, T_3 y T_4, respectivamente. Como $T_2 = T_4 \rightarrow b = d$

Calculamos esas hipotenusas, aplicando el teorema de Pitágoras sobre cada triángulo rectángulo:

$$a^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow a^2 = 36 + 36 \rightarrow a^2 = 72 \rightarrow a = \sqrt{72} \simeq 8{,}49\ cm$$

$$b^2 = 2^2 + 6^2 \rightarrow b^2 = 4 + 36 \rightarrow b^2 = 40 \rightarrow b = \sqrt{40} \simeq 6{,}32\ cm \ \ y \ \ d \simeq 6{,}32\ cm$$

$$c^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow c^2 = 4 + 4 \rightarrow c^2 = 8 \rightarrow c = \sqrt{8} \simeq 2{,}83\ cm$$

El perímetro del trapecio mide $P \simeq 8{,}49 + 6{,}32 + 2{,}83 + 6{,}32 = 23{,}96\ cm$

Podemos calcular el área del trapecio como $A_{trapecio} = A_{cuadrado} - \left(A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4}\right)$

$$A_{trapecio} = 8^2 - \left(\frac{6\cdot 6}{2} + \frac{2\cdot 6}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{6\cdot 2}{2}\right) = 64 - (18 + 6 + 2 + 6) = 64 - 32 = 32\ cm^2$$

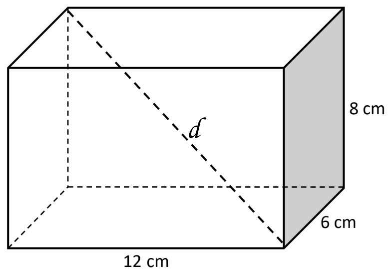
Para calcular la altura h del trapecio, vamos a utilizar el valor del área.

$$A_{trapecio} = \frac{\left(Base_{mayor} + base_{menor}\right) \times altura}{2} = \frac{(a + c)\cdot h}{2} \rightarrow 32 = \frac{(8{,}49 + 2{,}83)\cdot h}{2} \rightarrow 64 = 11{,}32 \cdot h \rightarrow h = \frac{64}{11{,}32} \rightarrow h \simeq 5{,}65\ cm$$

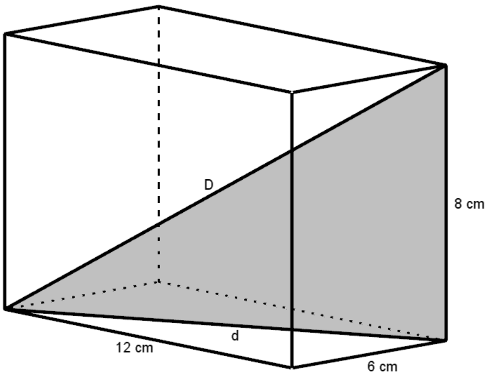
También podríamos haber utilizado el teorema de Pitágoras.

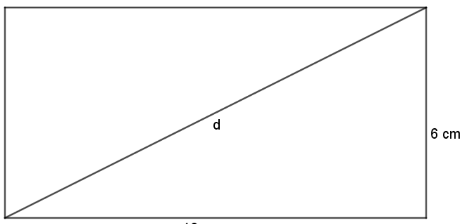
Ejercicio 12

Calcula la diagonal del siguiente ortoedro:



Solución:





Un ortoedro es un poliedro de 6 caras, donde todos los ángulos que forman las aristas son rectos. También podríamos definirlo como un prisma recto de base rectangular.

Un ortoedro tiene cuatro diagonales iguales. Para calcular la diagonal del ortoedro, primero debemos hallar la diagonal del rectángulo que forma la base.
Esa diagonal, d, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 12 *y* 6.

$d^2 = 12^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 144 + 36 \quad \rightarrow \quad d^2 = 180 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{180} \simeq 13,42\ cm$

Ahora, la diagonal del ortoedro es la hipotenusa del triángulo rectángulo sombreado que tiene por catetos d y 8

$D^2 = d^2 + 8^2 \quad \rightarrow \quad D^2 = 180 + 64 \quad \rightarrow \quad D^2 = 244 \quad \rightarrow \quad D = \sqrt{244} \simeq 15,62\ cm$

La diagonal del ortoedro mide $D \simeq 15,62\ cm$