Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Discútase el siguiente sistema según los valores del parámetro λ y resuélvase en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} 2x+\lambda y=2 \\ \lambda x+2y=2 \\ 2x+2y=\lambda \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2x+\lambda y=2 \\ \lambda x+2y=2 \\ 2x+2y=\lambda \end{cases}$$ *Como es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas, comenzamos analizando el rango de la matriz ampliada*

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \;;\; |\bar{A}|=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=12\lambda-16-\lambda^3 \;;\; |\bar{A}|=0 \Rightarrow \lambda^3-12\lambda+16=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=-4 \end{cases}$$

Discusión:

$Si\ \lambda\neq 2\ y\ \lambda\neq -4 \Rightarrow Rang(\bar{A})=3>Rang(A)=2 \Rightarrow$ *Sistema incompatible*

$Si\ \lambda=2 \Rightarrow Rang(A)=Rang(\bar{A})=1<$ *nº de incógnitas* $\Rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado*

$Si\ \lambda=-4 \Rightarrow Rang(A)=2=Rang(\bar{A})=$ *nº de incógnitas* $\Rightarrow$ *Sistema compatible determinado*

$Si\ \lambda=2$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang(A)=Rang(\bar{A})=1<\text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Las tres ecuaciones son iguales $\Rightarrow$ *el sistema queda reducido a* $2x+2y=2 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow y=1-x$

solución $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$

$Si\ \lambda=-4$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \;,\; \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow Rang(A)=2=Rang(\bar{A})=\text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

Basándonos en el menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado, sabemos que las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes $\Rightarrow$ *nos queda el sistema:*

$$\begin{cases} 2x-4y=2 \\ -4x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+y=1 \end{cases}$$ *, podemos resolverlo por métodos tradicionales pero vamos a usar la regla de Cramer.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ |A|=-3 \;;\; x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3}{-3}=-1 \;;\; y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3}{-3}=-1 \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -3\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

resuelve la ecuación matricial $A^{-1}\cdot(X+B)\cdot A=C$

Solución:

$X\in M_{3\times 3}\ \Rightarrow$ *para encontrar su valor, la mejor opción es despejar* X *en la ecuación matricial.*

$$A^{-1}\cdot(X+B)\cdot A=C\ \Rightarrow\ \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I_3}\cdot(X+B)\cdot\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I_3}=A\cdot C\cdot A^{-1}\ \Rightarrow\ X+B=A\cdot C\cdot A^{-1}\ \Rightarrow\ X=A\cdot C\cdot A^{-1}-B$$

Por tanto, la mejor opción pasa por calcular la matriz A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\ ;\ |A|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-1\ ;\ \left\{\begin{array}{lll} A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2 & A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1 & A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4 & A_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2 & A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\\ A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1 & A_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1 & A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\end{array}\right\}$$

$$\textit{Entonces}\ \ A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -4 & 2 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -4 & 2 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -3\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -4 & 2 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ -6 & 2 & -4\end{pmatrix}}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -3\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ -6 & 2 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -3\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

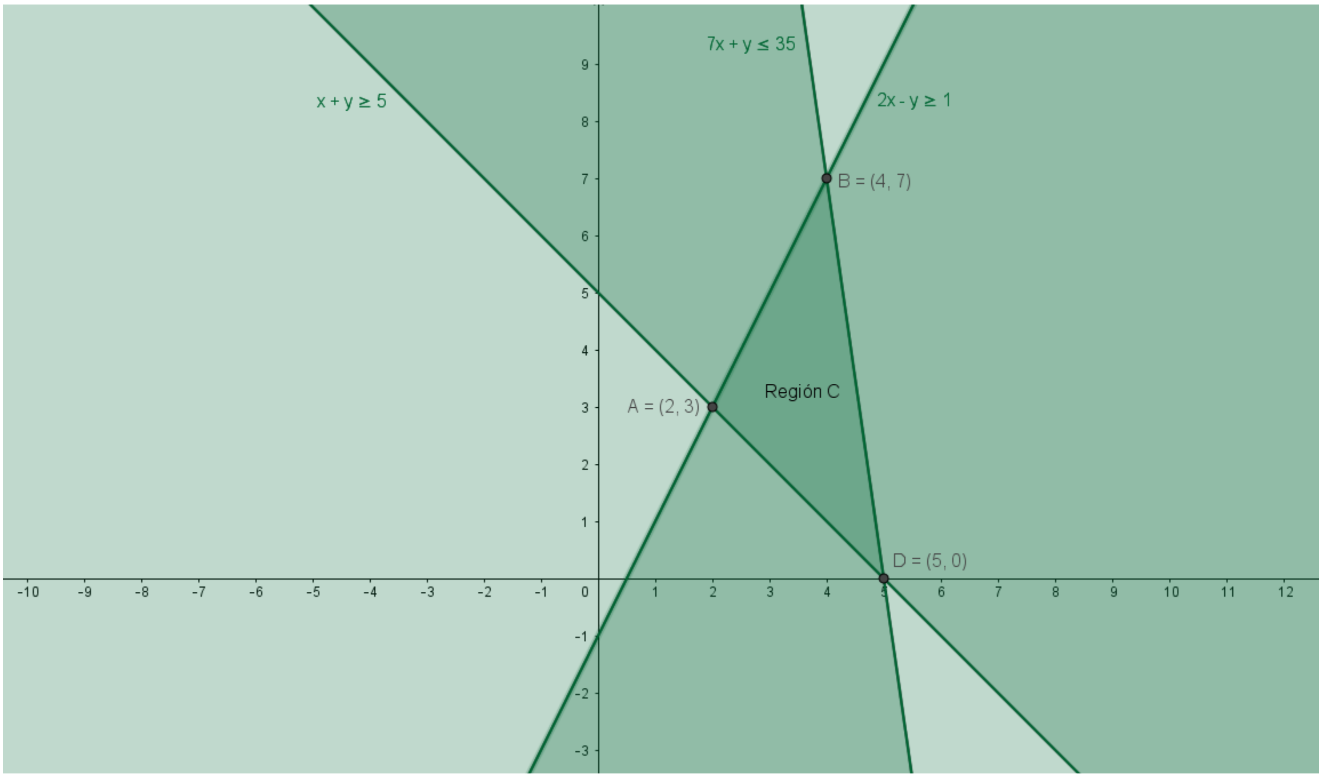
Sea C la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$2x - y \geq 1 \quad ; \quad x + y \geq 5 \quad ; \quad 7x + y \leq 35$$

- Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Calcúlense los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = 3x - 2y$ sobre la región C, determinando los puntos donde se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

Representamos las rectas $2x - y = 1$, $x + y = 5$, $7x + y = 35$, *y seleccionamos la parte del plano que verifica cada una de las inecuaciones. La región C será la intersección de los conjuntos solución de las tres inecuaciones.*



Los vértices de la región los obtenemos cortando las rectas dos a dos.

$$A \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow A = (2,3) \quad ; \quad B \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow B = (4,7) \quad ; \quad D = \begin{cases} x + y = 5 \\ 7x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow D = (5,0)$$

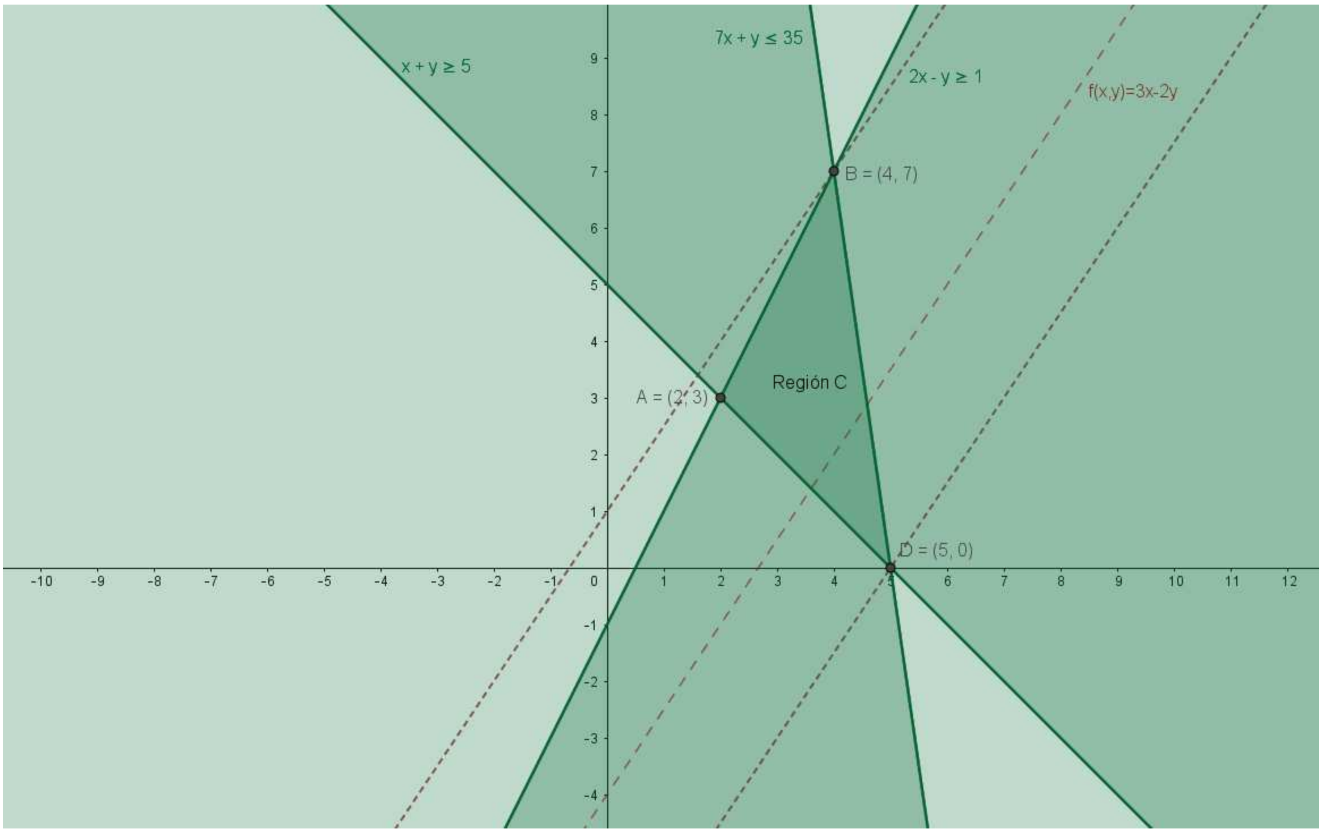
El máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 3x - 2y$ *sobre la región C, estarán en alguno de los vértices de dicha región,* (*la recta* $3x - 2y = k$ *no es paralela a ninguna de las que delimitan la región*)

Si sustituímos los puntos A, B y D en la función $f(x,y)$ *obtenemos:*

$$f(2,3) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0 \quad ; \quad f(4,7) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = -2 \quad ; \quad f(5,0) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 0 = 15$$

Por tanto el mínimo absoluto de la función es -2 *y se alcanza en el punto B, y el máximo absoluto es* 15 *y se alcanza en el punto D.*

También podíamos haber obtenido el máximo y el mínimo gráficamente, puesto que estarán en el primero y en el último punto de intersección de la región C con rectas paralelas a $3x-2y=k$.



Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Solución:

Definimos las tres incógnitas necesarias para resolver el problema.

$$\left| \begin{array}{l} x = n^o \text{ de participaciones de } 1€ \\ y = n^o \text{ de participaciones de } 2€ \\ z = n^o \text{ de participaciones de } 5€ \end{array} \right. \Rightarrow \text{el sistema será: } \begin{cases} x+2y+5z=600 \\ x-2z=0 \\ x+y+z=260 \end{cases} \text{ ; veamos qué tipo de sistema es:}$$

$$\text{La matriz asociada al sistema es } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \ |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1 \Rightarrow Rang(A)=Rang(\bar{A})=3=n^o \text{ incógnitas}$$

Luego se trata de un sistema compatible determinado (*solución única*), *lo resolveremos por la regla de Cramer.*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 600 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 260 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{160}{1}=160 \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 260 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{20}{1}=20 \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 600 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 260 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{80}{1}=80$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro a.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Como A no es la matriz nula $\Rightarrow Rang(A)\geq 1$

Ahora buscamos algún menor de orden 2 distinto de cero y lo encontramos tomando $F_1F_2C_1C_4$; $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ *por tanto sabemos que* $Rang(A)\geq 2$.

Veamos ahora los posibles menores de orden 3, teniendo en cuenta que cualquier menor de orden 3 distinto de cero que podamos encontrar en la matriz A, debe contener a las filas F_1 *y* F_2 *y a las columnas* C_1 *y* C_4*, es decir, al menor de orden 2 distinto de cero encontrado anteriormente.*

Por tanto esos menores de orden 3 son:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{vmatrix} = -8a-32 \Rightarrow -8a-32=0 \Rightarrow a=-4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 12a-16 \Rightarrow 12a-16=0 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

Siempre hay un menor de orden 3 distinto de cero; si $a=-4$, *no es cero el segundo determinante, y si* $a=\frac{4}{3}$, *entonces no es cero el primero.*

De todo esto deducimos que $Rang(A)=3$, *independientemente del valor del parámetro a.*

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -x & 1 \\ -4 & 2 & 1 & x \\ 6 & -3 & x & x+2 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -x & 1 \\ -4 & 2 & 1 & x \\ 6 & -3 & x & x+2 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \textit{calculemos primero el valor del determinante:}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -x & 1 \\ -4 & 2 & 1 & x \\ 6 & -3 & x & x+2 \end{vmatrix}_{C_1=C_1+2C_2} = \begin{vmatrix} 3+2x & x & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -x & 1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & x & x+2 \end{vmatrix} \underset{\textit{desarrollamos por } C_1}{=} (3+2x)\begin{vmatrix} -1 & -x & 1 \\ 2 & 1 & x \\ -3 & x & x+2 \end{vmatrix} = (3+2x)(6x^2+5x+1)$$

$$\textit{Ahora la ecuación es:} \ (3+2x)(6x^2+5x+1) = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} 3+2x=0 \ \Rightarrow \ x = -\dfrac{3}{2} \\ 6x^2+5x+1=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax+y+4z=1 \\ -x+ay-2z=1 \\ y+z=a \end{cases}$, se pide:

- Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro a.
- Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$\begin{cases} ax+y+4z=1 \\ -x+ay-2z=1 \\ y+z=a \end{cases} \ ; \quad \textit{la matriz asociada al sistema es } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2+2a-3$$

$$|A| = 0 \ \Rightarrow \ a^2+2a-3=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} a=1 \\ a=-3 \end{cases}$$

$$\textit{Si } a \neq 1 \textit{ y } a \neq -3, \ Rang(A) = 3 = Rang(\overline{A}) = n^{\circ} \textit{ de incógnitas } \Rightarrow \textit{Sistema compatible determinado}$$

$Si\ a=-3$

$$La\ matriz\ ampliada\ es\ \bar{A}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4 & 1\\ -1 & -3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\ ;\ \left|\begin{array}{l} en\ A\ encontramos\ el\ menor\ \begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ Rang\left(A\right)=2\\ en\ \bar{A}\ tenemos\ \begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=-28\neq 0\ \Rightarrow\ Rang\left(\bar{A}\right)=3\end{array}\right.$$

$Si\ a=1$

$$La\ matriz\ ampliada\ es\ \bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 1\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ ;\ \left|\begin{array}{l} en\ A\ encontramos\ el\ menor\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ Rang\left(A\right)=2\\ en\ \bar{A}\ tenemos\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ Rang\left(\bar{A}\right)=2\ \ ya\ que\ cualquier\\ menor\ de\ orden\ 3\ distinto\ de\ 0\ en\ \bar{A}\ debe\ contener\ a\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

$Discusión:$

$Si\ \ a\neq 1\ \ y\ \ a\neq -3\ ,\ \ Rang\left(A\right)=3=Rang\left(\bar{A}\right)=n^{o}\ de\ incógnitas\ \ \Rightarrow\ Sistema\ compatible\ determinado$

$Si\ a=-3\ ,\ Rang\left(A\right)=2<Rang\left(\bar{A}\right)=3\ \ \Rightarrow\ \ Sistema\ incompatible$

$Si\ a=1\ ,\ Rang\left(A\right)=2=Rang\left(\bar{A}\right)\ \ \Rightarrow\ \ Sistema\ compatible\ indeterminado\ \left(infinitas\ soluciones\right)$

$Resolvemos\ \ para\ \ a=1$

$El\ menor\ de\ orden\ 2\ distinto\ de\ cero\ era\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow esto\ nos\ indica\ que\ debemos\ quedarnos\ con\ las\ dos\ últimas$

$ecuaciones\ \ y\ considerar\ la\ incógnita\ z\ como\ parámetro:$

$$\begin{cases}\cancel{x+y+4z=1}\\ -x+y-2z=1\\ \quad\ \ y+z=1\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}-x+y=1+2z\\ \qquad\ y=1-z\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=-3z\\ y=1-z\end{cases}\ \Rightarrow\ \ solución:\begin{cases}x=-3\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

- (1,5 puntos) Estudia si las matrices $\left(A\cdot A^{T}\right)$ y $\left(A^{T}\cdot A\right)$ tienen inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.
- (0,5 puntos) Calcula el valor de los determinantes: $\left|\left(3A\cdot A^{T}\right)\right|$ y $\left|\left(A^{T}\cdot A\right)^{3}\right|$.

Solución:

$$Calculamos\ la\ matriz\ \ A\cdot A^{T}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 5 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}\ ;\ \left|A\cdot A^{T}\right|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 5 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}\underset{C_3=C_1+C_2}{=}0$$

$Como\ \left|A\cdot A^{T}\right|=0\ \ \Rightarrow\ \ La\ matriz\ \left(A\cdot A^{T}\right)\ no\ tiene\ inversa.$

Calculamos ahora la matriz $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\left|A^T \cdot A\right| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Como $\left|A^T \cdot A\right| \neq 0 \Rightarrow$ *La matriz* $\left(A^T \cdot A\right)$ *tiene inversa. Calculémosla:*

Llamamos $B = A^T \cdot A$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $|B| = 3$; $\begin{Bmatrix} B_{11} = 2 & B_{21} = -3 \\ B_{12} = -3 & B_{22} = 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\left(A^T \cdot A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora $\left|\left(3A \cdot A^T\right)\right| \underset{A\cdot A^T \text{ es } 3\times 3}{=} 3^3 \cdot \left|\left(A \cdot A^T\right)\right| = 27 \cdot 0 = 0$

Como $\left|B^3\right| = |B \cdot B \cdot B| = |B| \cdot |B| \cdot |B| = |B|^3 \Rightarrow \left|\left(A^T \cdot A\right)^3\right| = \left|\left(A^T \cdot A\right)\right|^3 = 3^3 = 27$

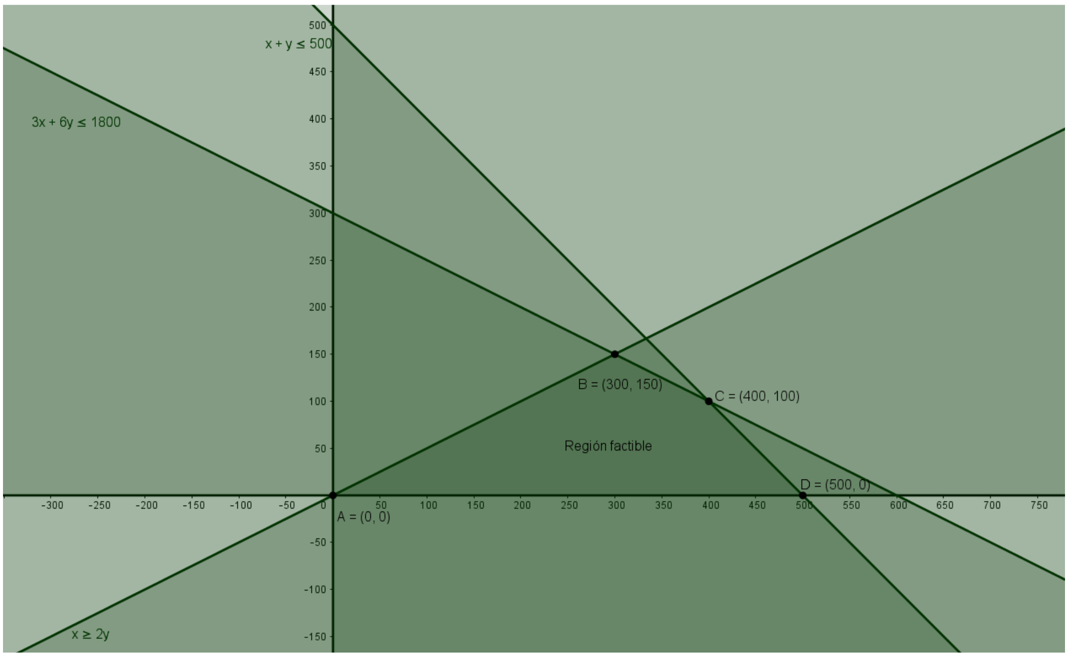
Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En una quesería se producen dos tipos de queso de leche de oveja: fresco y curado. La elaboración de un queso curado requiere 6 litros de leche de oveja y la de un queso fresco 3 litros. La ganancia por la venta de un queso fresco es 10 euros y por la de uno curado es 30 euros. Se sabe que la quesería dispone diariamente de 1800 litros de leche de oveja y su capacidad de producción es de 500 quesos diarios. Debido a la demanda, la producción de queso fresco debe ser al menos el doble que la de queso curado. Utiliza técnicas de programación lineal para encontrar la producción de quesos que hace máxima la ganancia diaria total de la fábrica por la venta de quesos, así como dicha ganancia máxima.

Solución:

$\overbrace{\begin{array}{l} x = n^o \text{ de quesos frescos} \\ y = n^o \text{ de quesos curados} \end{array}}^{Variables}$ $\overbrace{f(x,y) = 10x + 30y}^{Función\ objetivo}$ $\overbrace{\begin{array}{l} 3x + 6y \leq 1800 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \end{array}}^{Restricciones}$

Representamos las inecuaciones para encontrar la región factible y calculamos sus vértices.



$$A\equiv\begin{cases}x=2y\\x=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow A=(0,0)\quad;\quad B\equiv\begin{cases}x=2y\\3x+6y=1800\end{cases}\Rightarrow B=(300,150)\quad;\quad C\equiv\begin{cases}x+y=500\\3x+6y=1800\end{cases}\Rightarrow C=(400,100)$$

$$D\equiv\begin{cases}x+y=500\\y=0\end{cases}\Rightarrow D=(500,0)$$

El máximo de la función $f(x,y)=10x+30y$ se alcanzará en un vértice de la región factible. Sustituyendo esos puntos encontraremos el máximo.

$f(0,0)=0$; $f(300,150)=7500$; $f(400,100)=7000$; $f(500,0)=5000$

La ganancia diaria total de la fábrica por la venta de quesos se hace máxima cuando se producen 300 quesos frescos y 150 quesos curados, y esa ganancia asciende a 7500 €.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}4&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&2\\-2&1&2\end{pmatrix}\ ,\ D=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&6&3\end{pmatrix},$$

Encuentra la matriz X que cumple la igualdad $A\cdot X+B\cdot C=D$.

Solución:

Una opción es despejar la matriz X en la ecuación $A\cdot X+B\cdot C=D \Rightarrow A\cdot X=D-B\cdot C \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(D-B\cdot C)$

$X=A^{-1}\cdot(D-B\cdot C)$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ ;\ |A|=-1\ ;\ \begin{Bmatrix}A_{11}=-1 & A_{21}=1\\A_{12}=-1 & A_{22}=2\end{Bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}4&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&2\\-2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\2&5&2\end{pmatrix}\quad;\quad D-B\cdot C=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&6&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2&-4\\2&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&3\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot(D-B\cdot C)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&3\\-2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&1\end{pmatrix}$$

También se puede plantear viendo que $X\in M_{2\times3} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ y resolviendo el sistema que se obtiene al hacer las operaciones con las matrices de la ecuación.