Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$, se sabe que se verifica la igualdad $A^3+I=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula. Se pide:

- Calcula A^{2017}
- Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X+B=C$,con $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&3&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&2&0\\-1&4&-1\end{pmatrix}$

Solución:

Tenemos que se cumple la igualdad $A^3+I=0$. *Esta condición va a ser muy útil para resolver los dos apartados del ejercicio.*

Como $A^3+I=0 \;\Rightarrow\; A^3=-I \;\Rightarrow\; A^6=A^3\cdot A^3=(-I)\cdot(-I)=I^2=I \;\Rightarrow$ *como* $A^6=I$, $\left(A^6\right)^n=I^n=I$

$A^{2017}=A^{2016}\cdot A=I\cdot A=A$ *ya que* 2016 *es múltiplo de* 6 *y* $A^{2016}=\left(A^6\right)^{336}=I^{336}=I$

Por tanto $A^{2017}=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$

Ahora hay que resolver la ecuación $A\cdot X+B=C \;\Rightarrow\; A\cdot X=C-B \;\Rightarrow\; A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(C-B) \;\Rightarrow\; I_3\cdot X=A^{-1}\cdot(C-B)$; *entonces, la matriz* X *pedida será* $X=A^{-1}\cdot(C-B)$

$$C-B=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&2&0\\-1&4&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Para calcular A^{-1} *podemos usar la condición* $A^3+I=0 \;\Rightarrow\; -A^3=I \;\Rightarrow\; \left(-A^2\right)\cdot A=I \;\Rightarrow\; A^{-1}=-A^2$

$$-A^2=(-A)\cdot A=\begin{pmatrix}0&-3&-4\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot(C-B)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-6&-15&8\\5&11&-6\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; X=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-6&-15&8\\5&11&-6\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices X tales que $A\cdot X = X\cdot A$. Comprueba el resultado con una de las matrices obtenidas.

Solución:

$$\text{Como } A \text{ es una matriz de orden } 2\times 2 \;\Rightarrow\; X\in M_{2\times 2} \;\Rightarrow\; X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Por otro lado}\quad A\cdot X = X\cdot A \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b & 3a+2b \\ 2c+d & 3c+2d \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3c=2a+b & \rightarrow\; 3c=b \\ 2b+3d=3a+2b & \rightarrow\; 3d=3a \\ a+2c=2c+d & \rightarrow\; a=d \\ b+2d=3c+2d & \rightarrow\; b=3c \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=d \\ b=3c \end{cases} \quad \text{por tanto, las matrices pedidas son de la forma } X=\begin{pmatrix} a & 3c \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Ahora, por ejemplo}: \begin{cases} a=1 \\ c=-2 \end{cases} \;\Rightarrow\; X=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y comprobamos la igualdad.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, sabemos que $|A|=4$. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$|3A| \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2a+x & x \\ 6 & 2c+z & z \\ 4 & 2b+y & y \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1-x & 2-y & 3-z \\ a+x & b+y & c+z \end{vmatrix} \quad ; \quad \left|A^2\cdot A^T\cdot A^{-1}\right|.$$

Solución:

$$a)\; |3A|=\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3 & 6 & 9 \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}=3^3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=3^3\cdot 4=108$$

$$b)\; \begin{vmatrix} 2 & 2a+x & x \\ 6 & 2c+z & z \\ 4 & 2b+y & y \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2a+x & x \\ 3 & 2c+z & z \\ 2 & 2b+y & y \end{vmatrix}=2\cdot\left(\begin{vmatrix} 1 & 2a & x \\ 3 & 2c & z \\ 2 & 2b & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 3 & z & z \\ 2 & y & y \end{vmatrix}\right)=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2a & x \\ 3 & 2c & z \\ 2 & 2b & y \end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 3 & c & z \\ 2 & b & y \end{vmatrix}_{F_2\rightleftarrows F_3} =$$

$$=-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 2 & b & y \\ 3 & c & z \end{vmatrix}_{C_1\rightleftarrows C_2} =4\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & x \\ b & 2 & y \\ c & 3 & z \end{vmatrix}_{|A|=|A^T|} =4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=4\cdot 4=16$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1-x & 2-y & 3-z \\ a+x & b+y & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ a+x & b+y & c+z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a+x & b+y & c+z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a+x & b+y & c+z \end{vmatrix} = -\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}_{F_2 \rightleftarrows F_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}_{F_1 \rightleftarrows F_2} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -4$$

$$d)\ \left|A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}\right| = \left|A^2\right| \cdot \left|A^T\right| \cdot \left|A^{-1}\right| = |A|^2 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|A|} = |A|^2 = 16$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Encuentra los valores del parámetro real m para los cuales la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa y calcula M^{-1} para $m=3$.

Solución:

M *no tiene inversa* $\Leftrightarrow$ $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) + m + 1 = m^2 + m \quad \Rightarrow \quad m^2 + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m(m+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Si $m=0$, $m=-1$ *la matriz* M *no tiene inversa.*

Ahora calculemos M^{-1} *para* $m=3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |M| = 12$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/12 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/3 & -1/12 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Encuentra una matriz X que cumpla la igualdad $A\cdot X\cdot A^T=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}7&-4\\-6&3\end{pmatrix}$.

Solución:

$$X\in M_{2\times 2}\ ;\quad como\quad A\cdot X\cdot A^T=B \quad\Rightarrow\quad A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A^T\cdot\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^T\right)^{-1}\quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^T\right)^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ |A|=-1\ ;\quad \begin{matrix}A_{11}=-1 & A_{21}=-1\\ A_{12}=1 & A_{22}=2\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

Podemos calcular $\left(A^T\right)^{-1}$ *como la inversa de la matriz* $A^T=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ *o también así:* $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}$

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-4\\-6&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\3&-1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ X=\begin{pmatrix}0&1\\3&-1\end{pmatrix}$$