uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**C**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

   a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.
   b) Para $a = -2$, calcule A^{-1}.

2. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

   a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.
   b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & si \quad x < 1 \\ ae^{2x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
   b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

   a) Determine las asíntotas de esta función.
   b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de $1{,}5$ euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

6. (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & a \\ x + ay + z & = & a + 1 \\ x + y + az & = & 2 \end{array}\right\}$$

   a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
   b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

8. (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:
   a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
   b) Le guste el techno pero no el pop.

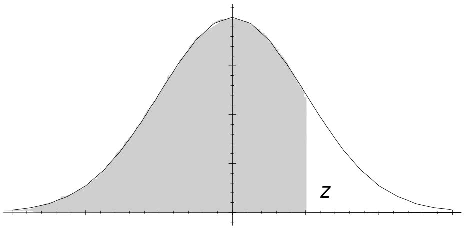
9. (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.
   a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.
   b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del $90\,\%$.

10. (2 puntos) En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el $35\,\%$, el $20\,\%$ y el $45\,\%$ de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el $15\,\%$ de los alevines criados en el tanque A, el $30\,\%$ de los alevines criados en el tanque B y el $25\,\%$ de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:
   a) Mida más de 35 mm.
   b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la existencia de A^{-1} .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto del determinante de la matriz A .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de los valores de los parámetros .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta del procedimiento de cálculo de A^{-1} .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la inversa .... 0,75 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Obtención de la función primitiva .... 0,50 puntos.
Determinación de la constante de integración y de la función .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de los intervalos de crecimiento y decrecimiento .... 0,50 puntos.
Determinación correcta del máximo y mínimo (basta con la abscisa) ... 0,50 puntos

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Valoración de la continuidad para $x \neq 1$ .... 0,25 puntos.
Estudio correcto de la continuidad en $x = 1$ .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto del valor del parámetro a para que f sea continua ...... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Estudio de los puntos de corte de la función con el eje OX .... 0,25 puntos.
Planteamiento correcto del área.. 0,25 puntos.
Obtención de una primitiva de la función .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto del área .... 0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Estudio completo de las asíntotas verticales... 0,50 puntos.
Determinación de la asíntota horizontal .... 0,25 puntos.
Justificación de la ausencia de asíntotas oblicuas .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto del cálculo de la recta tangente .... 0,25 puntos
Cálculo correcto de la derivada de la función .... 0,25 puntos.
Determinación de la pendiente .... 0,25 puntos.
Expresión de la recta tangente en cualquiera de sus formas .... 0,25 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Definición de las variables y expresión correcta de la función objetivo 0,25 puntos.
Determinación correcta de las restricciones .... 0,50 puntos.
Representación correcta de la región factible.. 0,50 puntos.
Cálculo de los vértices de la región factible .... 0,50 puntos.
Obtención correcta de la solución contextualizada .... 0,25 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto diferente al propuesto por los coordinadores ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Ejercicio 6. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Descripción adecuada de las tres incógnitas.. 0,25 puntos.
Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones .... 0,75 puntos.
Resolución correcta del sistema por método matricial........................... 0,75 puntos.
Obtención correcta de la solución contextualizada .... 0,25 puntos.

Ejercicio 7. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos.. 0,25 puntos.
Discusión correcta .... 0,75 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema .... 1,00 punto.

Ejercicio 8. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Ejercicio 9. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Obtención del error.. 0,25 puntos.
Determinación correcta del intervalo... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.
Obtención correcta del tamaño mínimo... 0,50 puntos

Ejercicio 10. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto diferente al propuesto por los coordinadores ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

SOLUCIONES

1. *a*) $|A| = -a^3 + a^2 + 2a = -a(a+1)(a-2) = 0 \Longleftrightarrow a = 0, a = 2, a = -1$. Por tanto, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq -1, 0, 2$.

   b) Para $a = -2$ se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. *a*)

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$f(0) = c = 2$$

   Por tanto, $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$.

   b) $f'(x) = x^2 + x - 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad y \quad x = 1$.

   - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2), (1, +\infty)$ y, por tanto, $f(x)$ es creciente en esos intervalos.
   - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$ y, por tanto, $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.

   En consecuencia tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

3. *a*) La función $f(x)$ es continua en cualquier punto $x \neq 1$. Por tanto, basta analizar la situación en $x = 1$.
   $\lim_{x\to 1^-}(x^2 - x + e^2) = e^2$, $\lim_{x\to 1^+} ae^{2x} = f(1) = ae^2$
   La función es continua si $a = 1$.

   b) Como la exponencial no corta al eje OX, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2)\ u^2$$

4. *a*)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{x-2}{(x-3)(x+3)}$$

   Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$$

   Por tanto, tiene asíntotas verticales en $x = -3$ y en $x = 3$.
   Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0$$

   La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
   Asíntotas oblicuas: no tiene por tener asíntotas horizontales.

   b) Ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x_0 = 0$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y_0 = f(0) = 2/9$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 9}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(0) = -1/9$$

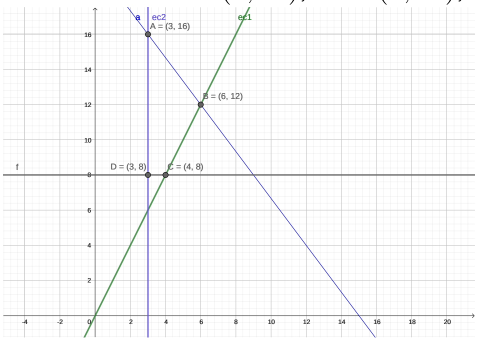
   La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x_0 = 0$ será:

$$y - \frac{2}{9} = \frac{-1}{9}x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{9} - \frac{1}{9}x$$

5. Sea $x =$ número de tabletas de 4 g. que se fabrican, e $y =$ número de tabletas de 3 g. que se fabrican. Entonces:

$$S = \{4x + 3y \leq 60,\ 2x - y \leq 0,\ x \geq 3,\ y \geq 8\},$$

con vértices $A = (3, 16)$, $B = (6, 12)$, $C = (4, 8)$, $D = (3, 8)$.



La función beneficio es $B(x, y) = 1{,}5x + y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(3, 16) = 20{,}5$
- $B(6, 12) = 21 \rightarrow$ Máximo
- $B(4, 8) = 14$
- $B(3, 8) = 12{,}5$

Se deben fabricar 6 tabletas de 4 gramos y 12 tabletas de 3 gramos. El beneficio obtenido será de 21 euros.

6. *a*) Sea $x =$ número de entradas generales vendidas, $y =$ número de entradas de estudiante y $z =$ número de entradas infantiles.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 600 \\ 10x + 8y + 5z & = & 4900 \\ x - 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que la solución es:

$$x = 200, y = 300, z = 100$$

Se han vendido 200 entradas generales, 300 entradas de estudiante, y 100 entradas infantiles.

7. *a*) La matriz del sistema es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right)$$

Cuyo determinante es $|A| = 2a^2 - 2a$.
Así, $2a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $a = 1$.
Por lo tanto:

- Si $a \neq 0, 1$, $rg(A) = 3$, $rg(A|B) = 3 =$ nº incógnitas. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.
- Si $a = 0$, $rg(A) = 2$, $rg(A|B) = 3$. SISTEMA INCOMPATIBLE.
- Si $a = 1$, $rg(A) = 2$, $rg(A|B) = 2 \neq$ nº de incógnitas. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

b) Para $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos por Gauss.

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y + z & = 1 \\ x + y + z & = 2 \\ x + y + z & = 2 \end{array}\right\}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 - 1/2 f_1}]{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Haciendo $z = \lambda$,

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y & = 1 - \lambda \\ y & = 3 - \lambda \end{array}\right\}$$

obtenemos $x = -1, y = 3 - \lambda, z = \lambda$.

8. Definimos los sucesos $A =$'a una persona le gusta el pop', $B =$ 'a una persona le gusta el techno'. Sabemos que $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}35$ y $P(A \cap B) = 0{,}15$.
   a) La probabilidad de que le guste al menos uno de los dos géneros musicales (pop o techno) se puede calcular utilizando el principio de inclusión-exclusión:
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45 + 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}65.$$
   b) La probabilidad pedida es: $P(\bar{A} \cap B)$ donde $\bar{A}$ es el complementario de A. Así:
   $$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}20.$$

9. *a*) Dado que la desviación típica poblacional es conocida, el intervalo de confianza viene dado por la expresión
   $$I_{95\,\%} = \left(\bar{x} - z_{0{,}025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, \bar{x} + z_{0{,}025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$
   luego
   $$I_{95\,\%} = \left(120 - 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}}\,;\, 120 + 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}} \right) \simeq (116{,}86\,;\, 123{,}14)\,.$$
   b) El error máximo en la estimación de la media viene dado por:
   $$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \text{Error máximo}$$
   Para un nivel de confianza del $90\,\%$, el valor crítico es aproximadamente $z_{0{,}05} \simeq 1{,}645$. Resolviendo para n:
   $$n > \left(\frac{8 \cdot 1{,}645}{1} \right)^2 = 173{,}19.$$
   Así, el tamaño mínimo de la muestra será de 174 plantas acuáticas.

10. Definimos los sucesos $D =$'un alevín mide más de 35 mm' y $\bar{D}$ es el complementario de D.
   a) La probabilidad pedida es:
   $$\begin{aligned} P(D) &= P(D \mid A) \cdot P(A) + P(D \mid B) \cdot P(B) + P(D \mid C) \cdot P(C) \\ &= 0{,}15 \cdot 0{,}35 + 0{,}30 \cdot 0{,}20 + 0{,}25 \cdot 0{,}45 = 0{,}225. \end{aligned}$$
   b) La probabilidad pedida es:
   $$P(C \mid \bar{D}) = \frac{P(C) \cdot P(\bar{D} \mid C)}{P(\bar{D})} = \frac{0{,}45 \cdot (1 - 0{,}25)}{1 - 0{,}225} = 0{,}4355.$$