UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A^2 - A$.
b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

A.2. (2 puntos) En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.
b) Para $a = 1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

A.4 (2 puntos) El informe ALADINO es un estudio de la Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición (AESAN) que se realiza a escolares de 6 a 9 años residentes en España. En el informe de 2019, el $50{,}2\,\%$ de los escolares encuestados tenían entre 6 y 7 años, los restantes tenían entre 8 y 9 años. Según los estándares de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se observó que el $23\,\%$ de los escolares estudiados presentaban sobrepeso y que en el grupo de escolares con 6-7 años de edad el $78\,\%$ no tenía sobrepeso. Eligiendo un escolar al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 6-7 años de edad.
b) No tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 8-9 años de edad.

A.5. (2 puntos) Para estimar el porcentaje de países firmantes de la Agenda 2030 que cumplieron en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible se tomó una muestra de países al azar.
a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0{,}20$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de países para garantizar que, con una confianza del $95\,\%$, el margen de error en la estimación no supere el $5\,\%$.
b) Si la muestra aleatoria fue de 34 países, de los cuales 10 cumplían al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible, determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para la proporción de países firmantes que cumplieron en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y-z & = & 2 \\ 2x+ay & = & 1 \\ x-2y+z & = & -1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x \leq 0 \\ 2x + a & x > 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

B.4. (2 puntos) En un festival de música actúan varios grupos del panorama nacional e internacional reconocidos en la industria musical actual. Los artistas se agrupan por estilo musical en las siguientes categorías: el $25\,\%$ son bandas de música *indie*, el $35\,\%$ de *k-pop* y el resto de música *trap*. Además, se sabe que son nacionales el $75\,\%$ de los grupos *indie*, el $15\,\%$ de las agrupaciones de *k-pop* y el $60\,\%$ de los artistas *trap*. Eligiendo un grupo musical al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea nacional.

b) Toque música *indie*, sabiendo que es nacional.

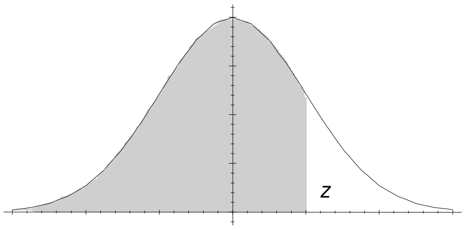
B.5. (2 puntos) El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas, obteniéndose una media muestral de 65 puntos. Determine un intervalo de confianza al $99\,\%$ para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\bar{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la matriz A^2.. 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la matriz solicitada .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Justificación de que la matriz es invertible .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la matriz inversa .... 0,75 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determinación de la función objetivo .... 0,25 puntos.

Determinación correcta de las restricciones .... 0,50 puntos.

Representación de la región factible y sus vértices .... 0,75 puntos.

Obtención de la solución (litros de aceite y beneficio máximo) .... 0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la condición de extremo relativo.................. 0,50 puntos.

Obtención correcta del valor del parámetro *a*.. 0,25 puntos.

Justificación de extremo relativo .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Cálculo de la ordenada y de la pendiente .... 0,50 puntos.

Determinación de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.

Obtención correcta del tamaño mínimo... 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo del error .... 0,50 puntos.

Obtención correcta del intervalo de confianza .... 0,50 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCION B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto del valor crítico .... 0,50 puntos.
Discusión correcta .... 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Solución correcta del sistema .... 1 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Estudio correcto de la continuidad .... 0,75 puntos.
Obtención del valor del parámetro a .... 0,25 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de la primitiva .... 0,50 puntos.
Planteamiento correcto del área.. 0,25 puntos.
Cálculo correcto del área .... 0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Estudio correcto del dominio de definición .... 0,25 puntos.
Determinación correcta de la asíntota vertical .... 0,25 puntos.
Determinación correcta de la asíntota horizontal .... 0,25 puntos.
Justificación de la no existencia de asíntota oblicua .... 0,25 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de la derivada .... 0,50 puntos.
Determinación correcta de los intervalos .... 0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto del error .... 0,25 puntos.
Determinación correcta del intervalo de confianza .... 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión correcta de la distribución de la media muestral .... 0,25 puntos.
Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,25 puntos.
Tipificación correcta de la variable .... 0,25 puntos.
Determinación correcta de la probabilidad.. 0,25 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

SOLUCIONES

A. 1. a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

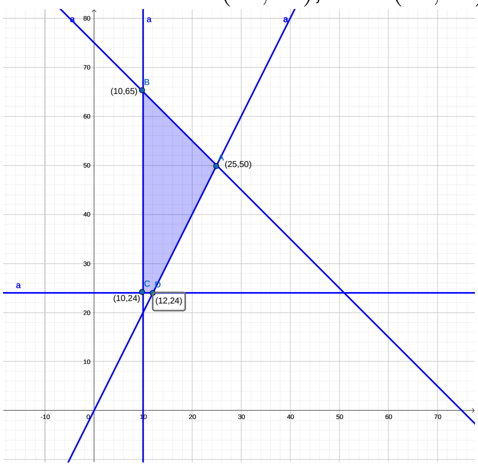
b) $|A| = -1$, por tanto es invertible. Como $A^2 - A = I \Longrightarrow A - I = A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2. Sea x : litros de aceite de girasol producidos, e y : litros de aceite de oliva producidos. Entonces:

$$S = \{2x - y \leq 0, x + y \leq 75, x \geq 10, y \geq 24\},$$

con vértices $A = (25, 50)$, $B = (10, 65)$, $C = (10, 24)$ y $D = (12, 24)$.



La función a maximizar es $B(x, y) = x + 3y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(25, 50) = 175$
- $B(10, 65) = 205 \rightarrow$ Máximo
- $B(10, 24) = 82$
- $B(12, 24) = 84$

Deben producir 10 litros de aceite de girasol y 65 de aceite de oliva. El beneficio obtenido será de 205 euros.

A.3. a) Calculamos la derivada

$$f'(x) = 2ax + 4 \Longrightarrow f'(1) = 2a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a = 2$, la derivada es $f'(x) = 4(1 - x)$
Si $x < 1$, $f'(x) > 0$ y f es creciente.
Si $x > 1$, $f'(x) < 0$ y f es decreciente.
Entonces, $x = 1$ tiene un máximo relativo y, que por tanto es un extremo relativo.

b)

$$f'(x) = 2x + 4 \Longrightarrow f'(0) = 4 \Longrightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Longrightarrow y = 4x + 5$$

A.4. Sea $S =$'el escolar tiene sobrepeso' y $G =$'el escolar pertenece al grupo con 6-7 años de edad'. Sabemos que $P(S) = 0{,}23$, $P(G) = 0{,}502$ y $P(\bar{S} \mid G) = 0{,}78$, donde $\bar{S}$ es el suceso complementario de S.

a) Por definición $P(S \mid G) = P(S \cap G)/P(G)$, entonces

$$P(S \cap G) = P(S \mid G) \cdot P(G) = \big(1 - P(\bar{S} \mid G)\big) \cdot P(G) = (1 - 0{,}78) \cdot 0{,}502 = 0{,}11.$$

b) Sea $\bar{G}$ el suceso complementario de G. La probabilidad pedida es

$$P(\bar{S} \cap \bar{G}) = P(\bar{S}) - P(\bar{S} \cap G) = 1 - P(S) - P(G) \cdot P(\bar{S} \mid G) = 1 - 0{,}23 - (0{,}502 \cdot 0{,}78) = 0{,}378.$$

A.5. a) $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$; $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$n \geq \dfrac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}05^2} = 245{,}8624$. El mínimo tamaño muestral es 246.

b) $\widehat{p} = 0{,}2941, n = 34, z_{\alpha/2} = 1{,}96$
$0{,}2941 \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}2941 \cdot 0{,}7058}{34}}$
$IC = (0{,}1409; 0{,}4473)$

B.1. *a*) La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es $|A| = 2a + 2$.
Así, $2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$.
Por lo tanto:

- Si $a \neq -1$, $rg(A) = 3$, $rg(A|B) = 3$. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.
- Si $a = -1$, $rg(A) = 2$, $rg(A|B) = 2$. La segunda ecuación es la tercera más la primera. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

b) Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos por Gauss.

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y &= 1 \\ x - 2y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Haciendo $z = \lambda$,

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 + \lambda \\ -3y &= -3 - 2\lambda \end{aligned}\right\}$$

obtenemos $x = 1 + (1/3)\lambda, \quad y = 1 + (2/3)\lambda, \quad z = \lambda.$

B.2. *a*) $f(x)$ es continua en cualquier valor de x diferente de 0. Para que la función sea continua en $x = 0$ necesitamos que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{x^2} = e^0 = 1$$

coincida con

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x + a) = a$$

y con

$$f(0) = 1$$

Concluimos que $a = 1$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

b) El área pedida es:

$$A = \int_1^3 (2x + 1)dx = [x^2 + x]_1^3 = 12 - 2 = 10u^2$$

B.3. *a*) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$.

- Asíntotas horizontales:
  $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, tiene asíntota horizontal en $y = 1$.
- Asíntotas verticales:
  $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$. En $x = 3$ tiene una asíntota vertical.
- No tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

b) Se calcula la derivada y se iguala a cero: $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$, entonces como no es igual a 0 y en el dominio siempre es negativa, la función es decreciente en $(-\infty, 3), (3, \infty)$.

B.4. Definimos los sucesos $I =$'música indie', $K =$'música k-pop', $T =$'música trap' y $N =$'nacional'.

a) La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(N) &= P(N \mid I)P(I) + P(N \mid K)P(K) + P(N \mid T)P(T) \\ &= 0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}15 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48. \end{aligned}$$

b) La probabilidad pedida es:

$$P(I \mid N) = \frac{P(N \mid I)P(I)}{P(N)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{0{,}48} = 0{,}391.$$

B.5. *a*) $IC_{95\,\%}(\mu) = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 65 \pm 2,575 \cdot 8/\sqrt{20} = 65 \pm 4,6063 = (60,3937; 69,6063)$

b) La variable aleatoria $\bar{X}$ sigue una distribución $N(67, 8/\sqrt{10})$

$$P(65 < \bar{X} < 69) = P\left(\frac{65-67}{8/\sqrt{10}} < Z < \frac{69-67}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 < Z < 0,79) = 0,7852-(1-0,7852) = 0,5704$$