# EJERCICIOS DE MATRICES Y DETERMINANTES (Selectividad Madrid)

Ejercicio 1 (Curso 2016/2017)

Considérense las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

- (1 punto) Determínese la matriz $C^{40}$.
- (1 punto) Calcúlese la matriz $X$ que verifica: $X\cdot A+3B=C$.

Ejercicio 2 (Curso 2016/2017)

Considérense las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -k\\ 1 & -2 & 1\\ k & 2 & -1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

- (1 punto) Discútase para qué valores del parámetro real $k$ la matriz $A$ tiene inversa.
- (1 punto) Determínese para $k=0$ la matriz $X$ que verifica la ecuación $A\cdot X=B$.

Ejercicio 3 (Curso 2015/2016)

Considérense las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 7 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $A\cdot C\cdot C^T\cdot A^{-1}$.
- (1 punto) Calcúlese la matriz $M=A\cdot B$. ¿Existe $M^{-1}$?

Nota: $C^T$ denota la matriz traspuesta de la matriz $C$.

Ejercicio 4 (Curso 2015/2016)

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}k & -1 & 0\\ -7 & k & k\\ -1 & -1 & k\end{pmatrix}$

- (1 punto) Estúdiese para qué valores del parámetro real $k$ la matriz $A$ tiene inversa.
- (1 punto) Determínese, para $k=1$, la matriz $X$ tal que $X\cdot A=Id$.

Nota: $Id$ denota la matriz identidad de tamaño $3\times 3$.

Ejercicio 5 (Curso 2014/2015)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$

- (1 punto) Estúdiese el rango de $A$ según los valores del parámetro real $k$.
- (1 punto) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de $A$ para $k=3$.

Ejercicio 6 (Curso 2014/2015)

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlese $A^{15}$ e indíquese si la matriz $A$ tiene inversa.
- (1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $\left(B\cdot A^T\cdot B^{-1}-2\cdot Id\right)^3$.

Nota: $A^T$ denota la matriz traspuesta de $A$. $Id$ es la matriz identidad de orden 2.

Ejercicio 7 (Curso 2013/2014)

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlese $\left(A^T\cdot B\right)^{-1}$, donde $A^T$ denota la traspuesta de la matriz $A$.
- (1 punto) Resuélvase la ecuación matricial $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8 (Curso 2013/2014)

Considérese la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlese $\left(A\cdot A^T\right)^{200}$.
- (1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $\left(A\cdot A^T-3I\right)^{-1}$.

Nota: $A^T$ denota la traspuesta de la matriz $A$. $I$ es la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 9 (Curso 2012/2013)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (1 punto) Calcúlese $A^{-1}$.
- (1 punto) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por: $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10 (Curso 2012/2013)

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlese la matriz inversa de $A$.
- (1 punto) Resuélvase la ecuación matricial $A\cdot X=B-I$, donde $I$ es la matriz identidad.

Ejercicio 11 (Curso 2010/2011)

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlense los valores de $k$ para los cuales la matriz $A$ no es invertible.
- (1 punto) Para $k=0$, calcúlese la matriz inversa $A^{-1}$.
- (1 punto) Para $k=0$, resuélvase la ecuación matricial $A\cdot X=B$.

Ejercicio 12 (Curso 2010/2011)

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad ; \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlense $a$, $b$ para que se verifique la igualdad $A\cdot B=B\cdot A$.
- (1 punto) Calcúlense $c$, $d$ para que se verifique la igualdad $A^2+cA+dI=O$.
- (1 punto) Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal $(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 13 (Curso 2009/2010)

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcúlense los valores de $a$ para los cuales no existe la matriz inversa $A^{-1}$.
- (1 punto) Para $a=-1$, calcúlese la matriz inversa $A^{-1}$.
- (1 punto) Para $a=0$, calcúlense todas las soluciones del sistema lineal $A\cdot X=O$.

Ejercicio 14 (Curso 2005/2006)

Encontrar todas las matrices $X$ cuadradas $2\times 2$ que satisfacen la igualdad $X\cdot A=A\cdot X$ en cada uno de los dos casos siguientes:

- (1,5 puntos) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- (1,5 puntos) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15 (Curso 2003/2004)

(3 puntos) Hallar todas las matrices

$$X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \; ; \; a,b,c\in\mathbb{R} \quad \text{que satisfacen la ecuación matricial} \quad X^2=2X .$$

Ejercicio 16 (Curso 2002/2003)

(3 puntos) Calcular los valores de $a$ para los cuales la inversa de la matriz $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ coincide con su traspuesta.

Ejercicio 17 (Curso 2001/2002)

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Calcular las matrices $M=A\cdot B$ y $N=B\cdot A$.
- (1 punto) Calcular $P^{-1}$, siendo $P=(N-I)$, donde $I$ representa la matriz identidad.
- (1 punto) Resolver el sistema $P\cdot X=C$.

Ejercicio 18 (Curso 2001/2002)

(3 puntos) Encontrar todas las matrices $X$ tales que $A\cdot X = X\cdot A$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 19 (Curso 2000/2001)
Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Compruébese que $B$ es la inversa de $A$.
- (1 punto) Calcúlense la matriz $(A-2I)^2$.
- (1 punto) Calcúlese la matriz $X$ tal que $A\cdot X = B$.

Ejercicio 20 (Curso 2000/2001)
Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Determínese si $A$ y $B$ son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.
- (1 punto) Resuélvase la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 3.
- (1 punto) Calcúlese $A^{86}$.

Ejercicio 21 (Curso 2004/2005) Modelo
(3 puntos) Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal si $A\cdot A^T = I$.
- Estudiar si la matriz $A$ es ortogonal

$$A=\begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Siendo $A$ la matriz del apartado anterior, resolver el sistema:

$$A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nota: La notación $A^T$ significa matriz traspuesta de $A$. $I$ es la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 22 (Curso 2007/2008) Modelo

(3 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & n & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ , $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, se pide:

- Hallar los valores de $n$ para los que la matriz $A$ tiene inversa.
- Resolver la ecuación matricial $A\cdot X=B$ para $n=3$.

Ejercicio 23 (Curso 2008/2009) Modelo

(3 puntos) Se considera la matriz dependiente del parámetro real $k$:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & k\\ k & 1 & k\end{pmatrix}$$

- Determínese los valores de $k$ para los cuales la matriz $A$ tiene inversa.
- Para $k=2$, calcúlese (si existe) $A^{-1}$.
- Para $k=1$, calcúlese $\left(A-2A^{T}\right)^{2}$.

Nota: La notación $A^{T}$ significa matriz traspuesta de $A$.

Ejercicio 24 (Curso 2010/2011) Modelo

(3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ -1 & a & 0\\ 0 & -6 & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

- Calcúlense los valores de $a$ para los cuales la matriz $A$ no tiene inversa.
- Para $a=2$, calcúlese la matriz inversa $A^{-1}$.
- Para $a=2$, calcúlese, si existe, la matriz $X$ que satisface $AX=B$.

Ejercicio 25 (Curso 2010/2011) Reserva

(3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -6\\ -2 & 1 & -2\\ -11 & 3 & -8\end{pmatrix}$$

- Calcúlese $A^{-1}\cdot A^{T}$.
- Resuélvase la ecuación matricial: $\frac{1}{4}A^{2}-AX=B$.

Nota: La notación $A^{T}$ significa matriz traspuesta de $A$.

Ejercicio 26 (Curso 2011/2012) Modelo

(3 puntos) Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$$

- Calcúlense los valores de $a$ para los cuales no existe la matriz inversa $A^{-1}$.
- Para $a=2$, calcúlese la matriz $B=\left(A^{-1}\cdot A^{T}\right)^{2}$.
- Para $a=2$, calcúlese la matriz $X$ que satisface la ecuación matricial $AX-A^{2}=A^{T}$.

Nota: $A^{T}$ representa la matriz traspuesta de $A$.

Ejercicio 27 (Curso 2011/2012) Coincidente

(3 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix} \quad ; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ , se pide:

- Para $k=4$, calcúlese el determinante de la matriz $3A^{2}$.
- Para $k=2$, calcúlese, si existe, la matriz inversa $A^{-1}$.

Ejercicio 28 (Curso 2012/2013) Modelo

(2 puntos) Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Obténgase $A^{2007}$.
- Hállese la matriz $B$ tal que $A\cdot B=\begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 29 (Curso 2012/2013) Coincidente

(2 puntos) Encuéntrese la matriz $X$ que verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 30 (Curso 2012/2013) Coincidente

(2 puntos) Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcúlense $A^{2}$ , $A^{3}$ , $A^{20}$.
- Hállese la matriz $B$ tal que $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 31 (Curso 2013/2014) Modelo

(2 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ a & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-2 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$, se pide:

– Hállense los valores de $a$, $b$ para los que se cumple $A+B+AB=C$.
– Para el caso en el que $a=1$ y $b=2$, determínese la matriz $X$ que verifica $BX-A=I$, donde $I$ es la matriz identidad.

Ejercicio 32 (Curso 2013/2014) Coincidente

(2 puntos) Considérese la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

– Calcúlese $A^{-1}$.
– Determínese la matriz $X$ tal que $A\cdot X=A^{-1}$.

Ejercicio 33 (Curso 2013/2014) Coincidente

(2 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

– Calcúlese $B^{31}$.
– Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1}\cdot B$.

Ejercicio 34 (Curso 2014/2015) Modelo

(2 puntos) Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

– Calcúlese $A^{-1}$.
– Calcúlese $A^{T}\cdot A$.

Nota: $A^{T}$ denota la traspuesta de la matriz $A$.

Ejercicio 35 (Curso 2014/2015) Coincidente

(2 puntos) Se consideran las matrices dependientes del parámetro real $a$:

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

– Determínense los valores de $a$ para los que la matriz $A\cdot B$ admite inversa.
– Para $a=0$, resuélvase la ecuación matricial $(A\cdot B)\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Ejercicio 36 (Curso 2014/2015) Coincidente

(2 puntos) Considérense las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

- Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$.
- Determínese la matriz $X$ tal que $B\cdot A\cdot X=C$.

Ejercicio 37 (Curso 2015/2016) Modelo

(2 puntos) Considérese la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ a & 0 & 8\\ -1 & a & -6\end{pmatrix}$$

- Determínese para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ es invertible $A$.
- Resuélvase para $a=0$ el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Ejercicio 38 (Curso 2015/2016) Modelo

(2 puntos) Determínese la matriz $X$ que verifica

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot X$$

Ejercicio 39 (Curso 2015/2016) Coincidente

(2 puntos) Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}a & 2 & 2\\ 1 & a & 2\\ a & 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad Id=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ , siendo $a$ un número real.

- Determínese $a$ para que la matriz $A$ admita inversa.
- Para $a=1$, determínese la matriz $X$ que verifica $A\cdot X+A=Id$.

Ejercicio 40 (Curso 2017/2018) Modelo

(2 puntos) Se considera la matriz dependiente del parámetro real $a$:

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & a\\ a & 0 & a\\ a & a & 0\end{pmatrix}$$

- Determínense los valores de $a$ para los que la matriz $A$ es invertible.
- Para $a=1$, despéjese y determínese la matriz $X$ de la ecuación matricial $A\cdot X=A+2Id$, donde $Id$ representa la matriz identidad de orden 3.