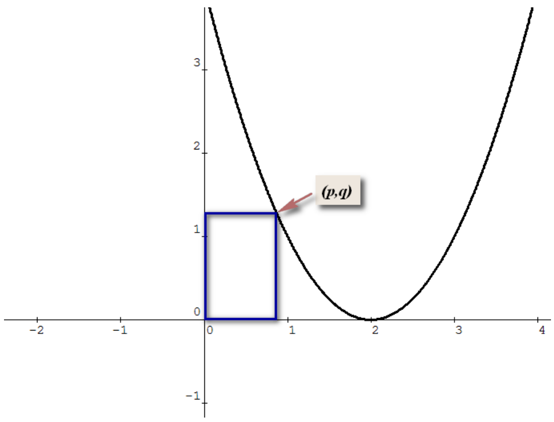
Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 4$ y un punto (p, q) sobre ella con $0 \le p \le 2$. Formamos un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos $(0,0)$ y (p,q). Calcula (p,q) para que el área de ese rectángulo sea máxima.

Solución:



El punto (p,q) *está en la parábola* $y = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad q = p^2 - 4p + 4$

El área del rectángulo será $A = p \cdot q$*, donde* $p \in [0,2]$ *es variable y* q *depende de* p*. Entonces tenemos que el área del rectángulo es una función de* $p \Rightarrow A(p) = p \cdot (p^2 - 4p + 4) \quad \Rightarrow \quad A(p) = p^3 - 4p^2 + 4p$

Queremos encontrar el máximo de esta función área, para ello derivamos e igualamos a cero.

$$A'(p) = 3p^2 - 8p + 4 \ ; \ A'(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3p^2 - 8p + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = 2 \\ p = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Comprobemos que el área máxima se alcanza para $p = \frac{2}{3}$; $A''(p) = 6p - 8 \quad \Rightarrow \quad A''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 = -4 < 0$

Si $p = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad q = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 = \frac{16}{9}$ *y el punto* $(p,q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los límites siguientes:

$$a) \ \lim_{x \to 0} \frac{2arctgx - x}{2x - arcsenx} \qquad b) \ \lim_{x \to 0} \left(\frac{senx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad c) \ \lim_{x \to 0^+} [\ln x \cdot tgx]$$

Solución:

$$a) \ \lim_{x \to 0} \frac{2arctg\,x - x}{2x - arcsen\,x} \quad \left(indeterminación \ \frac{0}{0}, \ aplicamos \ la \ regla \ de \ L'Hôpital \ que \ denotaremos \ por \ \triangleq \right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2arctg\,x-x}{2x-arcsen\,x}\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{1+x^2}-1}{2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{2\cdot\frac{1}{1+0}-1}{2-\frac{1}{\sqrt{1-0}}}=1$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x}{1}=1\Rightarrow\left(indeterminación\;\;1^{\infty}\right)\Rightarrow$ *Llamamos* $A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, *entonces*

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{sen\,x}{x}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{sen\,x}{x}\right)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)\triangleq$$

$$\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{sen\,x}{x}}\cdot\frac{x\cdot cos\,x-sen\,x}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cdot(x\cdot cos\,x-sen\,x)}{x^2\cdot sen\,x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot cos\,x-sen\,x}{2x^2\cdot sen\,x}\left(\frac{0}{0}\right)\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x-x\cdot sen\,x-cos\,x}{4x\cdot sen\,x+2x^2\cdot cos\,x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot sen\,x}{4x\cdot sen\,x+2x^2\cdot cos\,x}\left(\frac{0}{0}\right)\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x-x\cdot cos\,x}{4\cdot sen\,x+4x\cdot cos\,x+4x\cdot cos\,x-2x^2\cdot sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x-x\cdot cos\,x}{8x\cdot cos\,x+\left(4-2x^2\right)\cdot sen\,x}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{-cos\,x-cos\,x+x\cdot sen\,x}{8\cdot cos\,x-8x\cdot sen\,x-4x\cdot sen\,x+\left(4-2x^2\right)\cdot cos\,x}=\frac{-1-1+0}{8-0-0+4}=-\frac{1}{6}\Rightarrow\ln A=-\frac{1}{6}\Rightarrow A=e^{-\frac{1}{6}}\Rightarrow$$

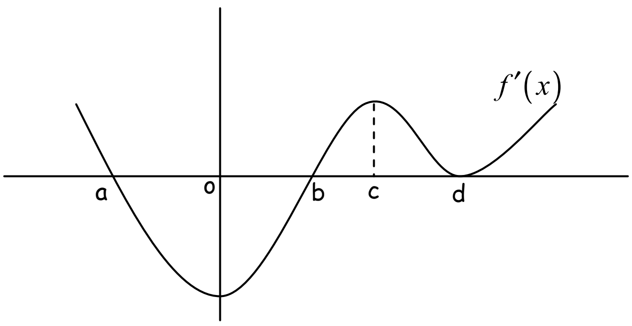
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

c) $\lim_{x\to 0^+}[\ln x\cdot tg\,x]$ $\left(indeterminación\;\;-\infty\cdot 0\right)\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}[\ln x\cdot tg\,x]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{cotg\,x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\triangleq\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sen^2 x}}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen^2 x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)\triangleq\lim_{x\to 0^+}\frac{-2sen\,x\cdot cos\,x}{1}=\frac{0}{1}=0$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x)$ una función tal que la gráfica de su derivada tiene la forma siguiente. Analiza las características de la función $f(x)$.



Solución:

–. $f(x)$ *es una función continua y derivable.*

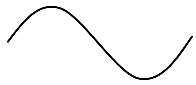
–. $f(x)$ *es creciente en* $(-\infty, a)\cup(b,d)\cup(d,+\infty)$ *puesto que en estos intervalos* $f'(x)>0$.

–. $f(x)$ *es decreciente en* (a,b) *puesto que en este intervalo* $f'(x)<0$.

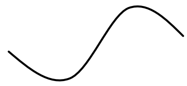
–. *En el punto* $x=a$, $f(x)$ *presenta un máximo local, ya que* $f'(a)=0$, $f(x)$ *crece para* $x<a$ *y* $f(x)$ *decrece para* $x>a$. *También podemos ver que* $f''(a)<0$ *puesto que la recta tangente a* $f'(x)$ *en* $x=a$ *tiene pendiente negativa.*

–. *En el punto* $x=b$, $f(x)$ *presenta un mínimo local, ya que* $f'(b)=0$, $f(x)$ *decrece para* $x<b$ *y* $f(x)$ *crece para* $x>b$. *También podemos ver que* $f''(b)>0$ *puesto que la recta tangente a* $f'(x)$ *en* $x=b$ *tiene pendiente positiva.*

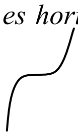
–. *En el punto* $x=0$, $f(x)$ *presenta un punto de inflexión ya que* $f''(0)=0$ *puesto que la recta tangente a* $f'(x)$ *en* $x=0$ *es horizontal (tiene pendiente cero), con cambio de curvatura de* $\cap$ *a* $\cup$.



–. *En el punto* $x=c$, $f(x)$ *presenta un punto de inflexión ya que* $f''(c)=0$ *puesto que la recta tangente a* $f'(x)$ *en* $x=c$ *es horizontal (tiene pendiente cero), con cambio de curvatura de* $\cup$ *a* $\cap$.



–. *En el punto* $x=d$, $f(x)$ *presenta un punto de inflexión (de silla) ya que* $f'(d)=0$ *y* $f''(d)=0$ *puesto que la recta tangente a* $f'(x)$ *en* $x=d$ *es horizontal y, el cambio de curvatura será de* $\cap$ *a* $\cup$ *al ser* $f(x)$ *creciente antes y después de ese punto.*



–. *La curvatura de* $f(x)$ *es* $\cup$ *en los intervalos* $(0,c)\cup(d,+\infty)$, *puesto que* $f''(x)>0$ *en esos intervalos.*

–. *La curvatura de* $f(x)$ *es* $\cap$ *en los intervalos* $(-\infty,0)\cup(c,d)$, *puesto que* $f''(x)<0$ *en esos intervalos.*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$, siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

– (2 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

– (1 punto) Estudiar para qué valor, o valores, de a la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal.

Solución:

$$f(x)=e^x+a\cdot e^{-x} \;\Rightarrow\; f'(x)=e^x-a\cdot e^{-x} \;;\; f'(x)=0 \Rightarrow e^x-a\cdot e^{-x}=0 \;\Rightarrow\; e^x-\frac{a}{e^x}=0 \;\Rightarrow\; e^{2x}-a=0 \;\Rightarrow$$

$$e^{2x}=a \;\Rightarrow\; \ln\left(e^{2x}\right)=\ln a \;\Rightarrow\; 2x=\ln a \;\Rightarrow\; x=\frac{\ln a}{2} \quad (\textit{existe para } a>0)$$

Si $x=\dfrac{\ln a}{2}$, $f(x)$ *puede tener un máximo o un mínimo local; nos apoyamos en la segunda derivada de* $f(x)$ *para determinarlo.*

$$f''(x)=e^x+a\cdot e^{-x} \;\Rightarrow\; f''\left(\frac{\ln a}{2}\right)=e^{\frac{\ln a}{2}}+a\cdot e^{-\frac{\ln a}{2}}>0,\ \forall a>0 \;\Rightarrow\; f(x) \textit{ presenta un mínimo en } x=\frac{\ln a}{2}$$

$$Si\ x=\frac{\ln a}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\ln a}{2}\right)=e^{\frac{\ln a}{2}}+a\cdot e^{-\frac{\ln a}{2}}=\sqrt{e^{\ln a}}+\frac{a}{\sqrt{e^{\ln a}}}=\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{2a}{\sqrt{a}}=2\sqrt{a}$$

Por tanto si $a>0$ $f(x)$ *tiene un mínimo realtivo en el punto* $\left(\frac{\ln a}{2},2\sqrt{a}\right)$ *y si* $a\le 0$ $f(x)$ *no tiene extremos relativos.*

Veamos ahora el crecimiento. $f'(x)=e^x-a\cdot e^{-x}>0 \Rightarrow e^x-\frac{a}{e^x}>0 \Rightarrow e^{2x}-a>0 \Rightarrow e^{2x}>a$

–. *Si* $a\le 0 \Rightarrow$ *como* $e^{2x}>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ *es creciente en* $(-\infty,+\infty)$.

–. *Si* $a>0 \Rightarrow e^{2x}>a \Rightarrow 2x>\ln a \Rightarrow x>\frac{\ln a}{2} \Rightarrow f(x)$ *es creciente en* $\left(\frac{\ln a}{2},+\infty\right)$ *y es*

decreciente en $\left(-\infty,\frac{\ln a}{2}\right)$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=k\in\mathbb{R} \Rightarrow$ *la recta* $y=k$ *es asíntota horizontal.*

Partiendo de que $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ *y* $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ *tenemos que* $\lim_{x\to\infty}\left(e^x+a\cdot e^{-x}\right)=\lim_{x\to\infty} e^x+a\cdot\lim_{x\to\infty} e^{-x}$

$$\begin{cases} Si\ a\neq 0 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+a\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=(+\infty)+a\cdot 0=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x+a\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=0+a\cdot(+\infty)=\infty\end{cases} \Rightarrow f(x)\ \text{no tiene asíntota horizontal} \\ Si\ a=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^x \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \Rightarrow \text{la recta } y=0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x\to-\infty \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La recta de ecuación $y=2x-7$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ en el punto $x=1$. Calcula a y b.

Solución:

La recta $y=2x-7$ *y la curva* $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ *son tangentes en* $x=1 \Rightarrow$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{cases}\text{el punto } (1,-5) \text{ pertenece a la recta y a la curva} \Rightarrow f(1)=-5 \Rightarrow 1+a+b+2=-5 \\ f'(1)=\text{pendiente de la recta tangente en } x=1 \Rightarrow f'(1)=2 \Rightarrow 3+2a+b=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=-8\\ 2a+b=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=7\\ b=-15\end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3+7x^2-15x+2$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la función $f\left(x\right)=x\cdot e^{1/x}$, se pide determinar sus asíntotas.

Solución:

$-$. *Asíntotas horizontales*: $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=k\in\mathbb{R}$; $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot e^{1/x}\right)=\infty\cdot e^{0}=\infty \Rightarrow f\left(x\right)$ *no tiene asíntota horizontal*

$-$. *Asíntotas verticales*: $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$; $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot e^{1/x}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\left(x\cdot e^{1/x}\right)=0\cdot e^{-\infty}=0\\ \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot e^{1/x}\right)=0\cdot e^{+\infty}\Rightarrow \text{indeterminación } 0\cdot\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot e^{1/x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}=\left(ind.\ \frac{\infty}{\infty},\ aplicamos\ L'Hôpital\right)\triangleq\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{1/x}=e^{+\infty}=+\infty\ ;$$

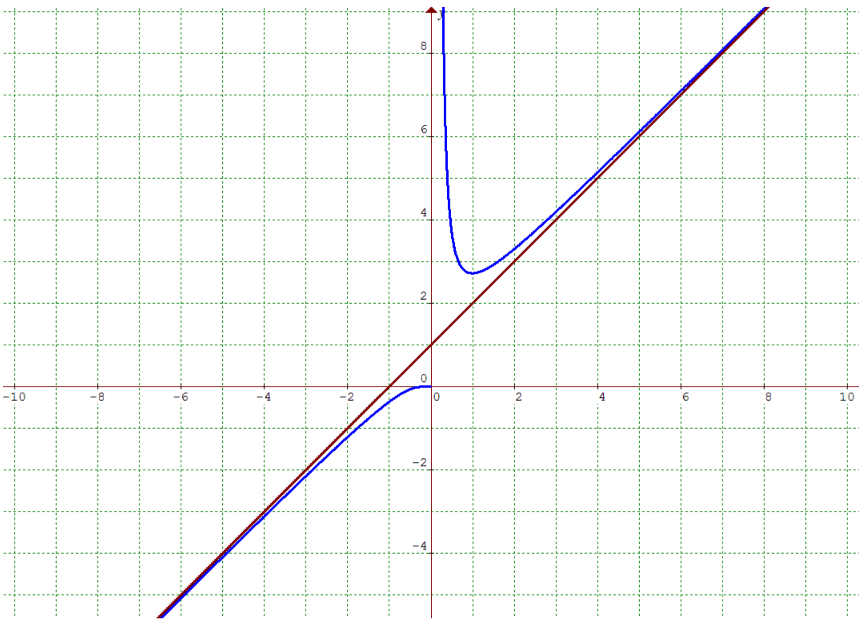
$x=0$ *es una asíntota vertical de* $f\left(x\right)$ *cuando* $x\to 0^+$

$-$. *Asíntotas oblicuas*: $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(mx+n\right)\Rightarrow\begin{cases}m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}\\ n=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)\end{cases}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{1/x}}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{1/x}=e^{0}=1\Rightarrow m=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot e^{1/x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}\triangleq\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{1/x}=e^{0}=1\Rightarrow n=1$$

$y=x+1$ *es una asíntota oblicua de* $f\left(x\right)$.



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x)=\left|sen(2x)-\frac{1}{2}\right|$.

- Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo $(0,\pi)$.
- Encuentra los extremos relativos de la función en ese intervalo.

Solución:

$g(x)=sen\,2x-\frac{1}{2}$ *es una función continua en todo* $\mathbb{R}$ *por ser suma de funciones continuas* $\Rightarrow$

$f(x)=\left|sen\,2x-\frac{1}{2}\right|$ *también será una función continua en* $\mathbb{R}$ *puesto que el valor absoluto de una función continua es una función continua* $\Rightarrow$ *Comprobemos, por la definición, que* $f(x)=\left|sen\,2x-\frac{1}{2}\right|$ *es continua en el intervalo* $(0,\pi)$.

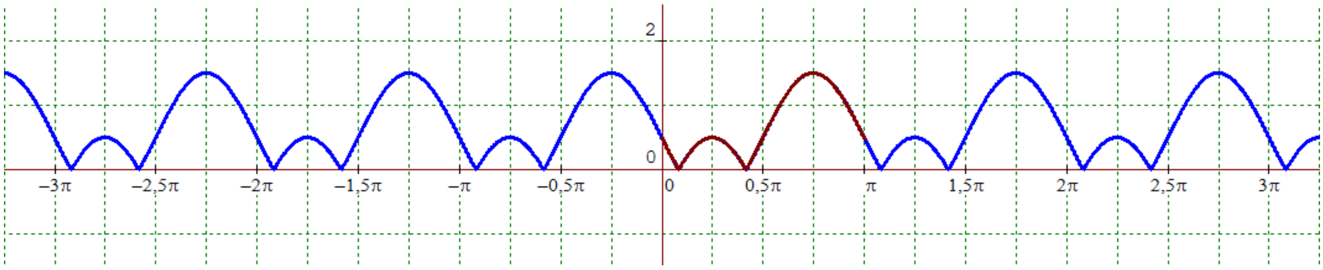
$$sen\,2x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow sen\,2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{\pi}{12} \\ 2x=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$f(x)=\left|sen\,2x-\frac{1}{2}\right|=\begin{cases} -sen\,2x+\frac{1}{2} & si\ \ 0<x\le\frac{\pi}{12} \\ sen\,2x-\frac{1}{2} & si\ \ \frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12} \\ -sen\,2x+\frac{1}{2} & si\ \ \frac{5\pi}{12}\le x<\pi \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}^-}\left(-sen\,2x+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}^+}\left(sen\,2x-\frac{1}{2}\right) \\ f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{12}^-}\left(sen\,2x-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{12}^+}\left(-sen\,2x+\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.$$

Analicemos ahora la derivabilidad de $f(x)$. *La función es derivable en todos los puntos salvo, quizás, en* $x=\frac{\pi}{12}$, $x=\frac{5\pi}{12}$.

$$f'(x)=\begin{cases} -2cos\,2x & si\ \ 0<x<\frac{\pi}{12} \\ 2cos\,2x & si\ \ \frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12} \\ -2cos\,2x & si\ \ \frac{5\pi}{12}<x<\pi \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} f'_-\left(\frac{\pi}{12}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}^-}(-2cos\,2x)=-\sqrt{3} \\ f'_+\left(\frac{\pi}{12}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}^+}(2cos\,2x)=\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow f'_-\left(\frac{\pi}{12}\right)\ne f'_+\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \left| \begin{array}{l} f'_-\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{12}^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{12}^-}(2cos\,2x)=-\sqrt{3} \\ f'_+\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{12}^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{12}^+}(-2cos\,2x)=\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow f'_-\left(\frac{5\pi}{12}\right)\ne f'_+\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{array}\right.$$

Entonces, $f(x)$ *no es derivable en los puntos* $x=\frac{\pi}{12}$ *y* $x=\frac{5\pi}{12}$ *del intervalo* $(0,\pi)$



Cuando la función $f(x)$ es derivable, los extremos relativos los obtenemos como soluciones de la ecuación $f'(x)=0$ en $(0,\pi)$ $\Rightarrow$ en todos los casos tenemos: $\cos 2x=0$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4} \\ 2x=\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$f''(x)=\begin{cases} 4sen\,2x & si\ 0<x<\dfrac{\pi}{12} \\ -4sen\,2x & si\ \dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{5\pi}{12} \\ 4sen\,2x & si\ \dfrac{5\pi}{12}<x<\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-4sen\dfrac{2\pi}{4}=-4<0 \Rightarrow \text{en } x=\dfrac{\pi}{4} \text{ hay un máximo relativo.} \\ f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=4sen\dfrac{6\pi}{4}=-4<0 \Rightarrow \text{en } x=\dfrac{3\pi}{4} \text{ hay un máximo relativo.} \end{cases}$$

Como $f(x)=\left|sen(2x)-\dfrac{1}{2}\right|$ $\Rightarrow$ donde $sen(2x)-\dfrac{1}{2}=0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un mínimo relativo $\Rightarrow$ en $x=\dfrac{\pi}{12}$ y $x=\dfrac{5\pi}{12}$ hay mínimos relativos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

- (2 puntos) Probar que existe un único número real x que es solución de la ecuación $sen^2x=3x-4$.
- (1 punto) Calcular dicha solución con una cifra decimal exacta.

Solución:

Tenemos la ecuación $sen^2x=3x-4$ $\Rightarrow$ $sen^2x-3x+4=0$, las soluciones de esta ecuación coinciden con los ceros de la función $f(x)=sen^2x-3x+4$.

$f(x)$ es una función continua y derivable en todo $x\in\mathbb{R}$, en particular, $f(x)$ es continua en el intervalo $[0,\pi]$ con $f(0)=4>0$ y $f(\pi)=-3\pi+4<0$ $\Rightarrow$ aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que $\exists\, x_0\in(0,\pi)$ tal que $f(x_0)=0$ $\Rightarrow$ la ecuación $sen^2x-3x+4=0$ tiene, al menos, una solución x_0, con $0<x_0<\pi$.

Veamos que esa solución es única. Para ello suponemos que la ecuación $sen^2x-3x+4=0$ tiene dos soluciones distintas x_0 y x_1, con $x_0<x_1$. Entonces, $f(x)$ es continua en $[x_0,x_1]$, $f(x)$ es derivable en (x_0,x_1) y $f(x_0)=0=f(x_1)$, por el teorema de Rolle, debe existir $c\in(x_0,x_1)$ tal que $f'(c)=0$.

Pero $f'(x)=2sen\,x\cdot cos\,x-3$ y para que $f'(x)=0$ $\Rightarrow$ $2sen\,x\cdot cos\,x-3=0$ $\Rightarrow$ $sen\,2x-3=0$ $\Rightarrow$ $sen\,2x=3$, lo cual es imposible $\Rightarrow$ no existe $c\in\mathbb{R}$; esto entra en contradicción con lo que nos garantizaba el teorema de Rolle $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ el supuesto de que la ecuación tenía dos soluciones reales diferentes es falso y concluímos que:
$sen^2x-3x+4=0$ tiene una única solución real.

Vamos a calcular ahora dicha solución con una cifra decimal exacta, aplicando sucesivamente el teorema de Bolzano. Ya sabemos que la solución x_0 está en el intervalo $(0,\pi)$.

$$\begin{cases} f(1)=sen^2(1)-3+4>0 \\ f(\pi)<0 \end{cases} \Rightarrow x_0\in(1,\pi);\ \begin{cases} f(1)>0 \\ f(2)=sen^2(2)-6+4<0 \end{cases} \Rightarrow x_0\in(1,2);\ \begin{cases} f(1'6)=sen^2(1'6)-4'8+4>0 \\ f(2)<0 \end{cases} \Rightarrow x_0\in(1'6,2)$$

$$\begin{cases} f(1'6)>0 \\ f(1'7)=sen^2(1'7)-5'1+4<0 \end{cases} \Rightarrow x_0\in(1'6,1'7) \Rightarrow x_0\simeq 1'6$$