

Instrucciones: Debes resolver cuatro ejercicios, a elegir entre los cinco propuestos.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \cdot e^{-2x} & \text{si } x \leq 1 \\ (1 - x) \cdot \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, se pide:

- (1,25 puntos) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
- (1,25 puntos) Encuentra los extremos relativos de $f(x)$.

Solución:

$f(x)$ es continua y derivable en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$ por ser producto de funciones continuas y derivables.

Veamos si $f(x)$ es continua en $x=1$: $f(1)=0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1)e^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=1$

Por tanto $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} (-2x^2 + 2x + 2)e^{-2x} & \text{si } x < 1 \\ -\ln x + \frac{1}{x} - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}; \text{ veamos si } f(x) \text{ es derivable en } x=1$$

$$\left| \begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 2x + 2)e^{-2x} = \frac{2}{e^2} \\ f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\ln x + \frac{1}{x} - 1\right) = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow f'_-(1) \neq f'_+(1) \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=1$$

Buscamos ahora los extremos relativos de $f(x)$

$$\text{Si } x < 1 \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (-2x^2 + 2x + 2)e^{-2x} = 0 \left\{ \begin{array}{l} e^{-2x} \neq 0 \\ -2x^2 + 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{Si } x < 1 \rightarrow f''(x) = (4x^2 - 8x - 2)e^{-2x} \Rightarrow f''\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) > 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ } f(x) \text{ tiene un mínimo}$$

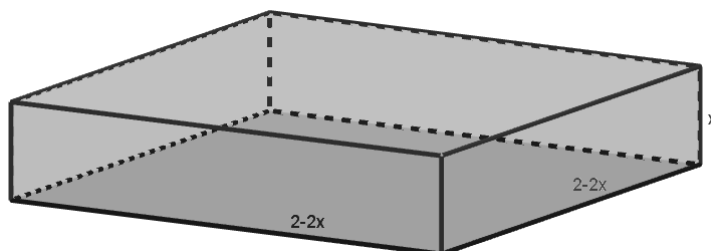
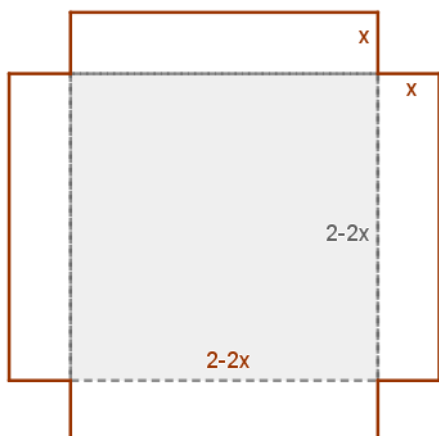
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ en el intervalo } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \\ \text{Si } x > 1 \rightarrow f'(x) = -\ln x + \frac{1}{x} - 1 < 0 \quad \forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (1, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{en } x=1 \text{ } f(x) \text{ tiene un máximo}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Con una plancha cuadrada de acero inoxidable de 4 m^2 se quiere construir un depósito sin tapa con forma de ortoedro y de la mayor capacidad posible. Para ello se recortarán cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la plancha y se plegarán los salientes de la figura resultante para soldar las aristas verticales del depósito.

- (2 puntos) Halla la medida de los cuadrados que debemos recortar.
- (0,5 puntos) Indica los litros de capacidad que tendrá el depósito así construido.

Solución:



$x \rightarrow$ lado del cuadrado que recortamos en las esquinas.

El volumen del depósito depende del valor de x :

$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} \Rightarrow V(x) = (2-2x)^2 \cdot x \Rightarrow V(x) = (4-8x+4x^2) \cdot x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$$

Buscamos el máximo de la función volumen:

$$V'(x) = 12x^2 - 16x + 4 \quad ; \quad V'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$V''(x) = 24x - 16 \rightarrow V''\left(\frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{3} - 16 < 0 \Rightarrow \text{Si } x = \frac{1}{3} \text{ de metro el volumen del depósito es máximo}$$

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \text{ m}^3 \Rightarrow V \approx 592,6 \text{ litros}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Prueba que las curvas $f(x) = (x-1) \cdot e^x$ y $g(x) = 2 - x^2$ se cortan exactamente en dos puntos y localízalos aproximadamente.

Solución:

$f(x)$ y $g(x)$ se cortan en los puntos en los que $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$

Sea $h(x) = f(x) - g(x) \rightarrow h(x) = (x-1)e^x + x^2 - 2$

Debemos probar que ambas curvas se cortan exactamente en dos puntos. Empezaremos por demostrar que no se cortan en más de dos puntos.

Para ello, supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en tres puntos $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = 0$

$h(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R} \Rightarrow h(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ y $[x_2, x_3]$; $h(x)$ es derivable en (x_1, x_2) y (x_2, x_3) y $h(x_1) = h(x_2)$ y $h(x_2) = h(x_3) \Rightarrow$ por el th. de Rolle, existen $c_1 \in (x_1, x_2)$ y $c_2 \in (x_2, x_3)$ tales que $h'(c_1) = 0$ y $h'(c_2) = 0$.

Pero $h'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x + 2x \rightarrow h'(x) = x \cdot e^x + 2x \rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x + 2x = 0 \rightarrow x \cdot (e^x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x + 2 \neq 0 \end{cases}$

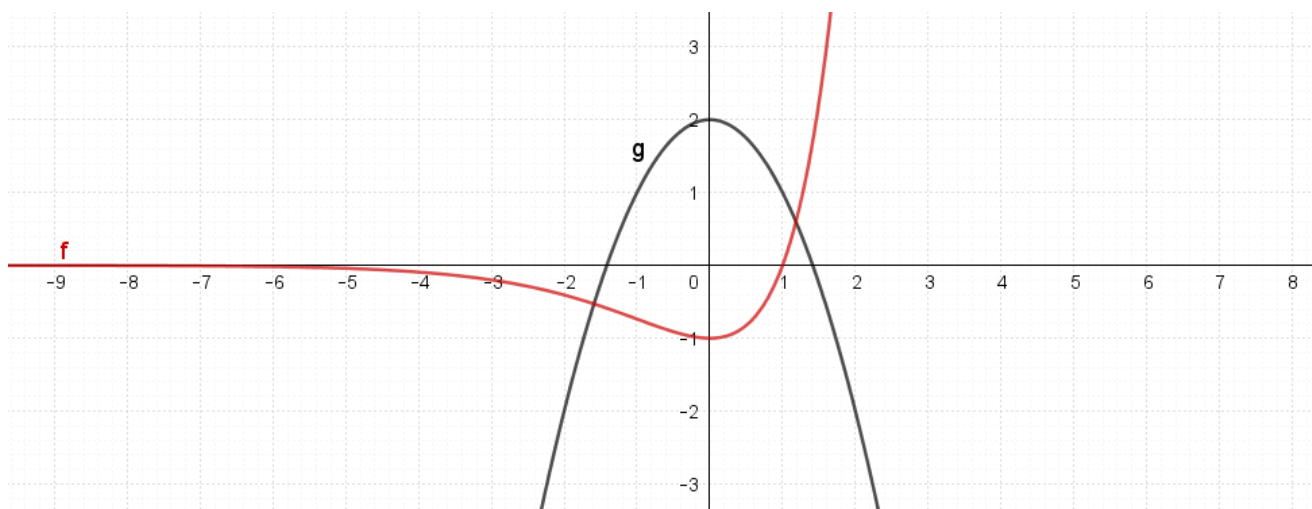
Contradicción porque $h'(x)$ sólo tiene una raíz $\Rightarrow f(x)$ y $g(x)$ no se cortan en tres puntos.

Veamos que se cortan en dos puntos.

$h(x)$ es continua en los intervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$ con $\begin{cases} h(-2) = -\frac{3}{e^2} + 2 > 0 \\ h(0) = -3 < 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} h(0) = -3 < 0 \\ h(2) = e^2 + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ por el th. de Bolzano,

existen $x_1 \in (-2, 0)$ y $x_2 \in (0, 2)$ tales que $h(x_1) = 0$ y $h(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = g(x_1)$ y $f(x_2) = g(x_2) \Rightarrow$ las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en los puntos x_1 y x_2 .

Ajustando los intervalos con la calculadora obtenemos que $x_1 \in (-1'6, -1'55)$ y $x_2 \in (1'15, 1'2) \Rightarrow x_1 \approx -1,6$ y $x_2 \approx 1,2$



Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2\operatorname{sen} x}{x}$

- (0,75 puntos) Estudia la continuidad de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Prueba que la gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $[-2, 2]$.
- (1 punto) Determina las asíntotas de $f(x)$ si existen.

Solución:

$f(x) = \frac{x^2 - 2\operatorname{sen} x}{x}$ es cociente de funciones continuas en todo $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo donde se anule el denominador. $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$f(0) = \frac{0}{0} \notin \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2\operatorname{sen} x}{x} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\cos x}{1} = -2 \Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$

$f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 2]$ con $\begin{cases} h(1) = \frac{1 - 2\operatorname{sen} 1}{1} < 0 \\ h(2) = \frac{4 - 2\operatorname{sen} 2}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ por el th. de Bolzano, existe $x_1 \in (1, 2)$ tal que $f(x_1) = 0$

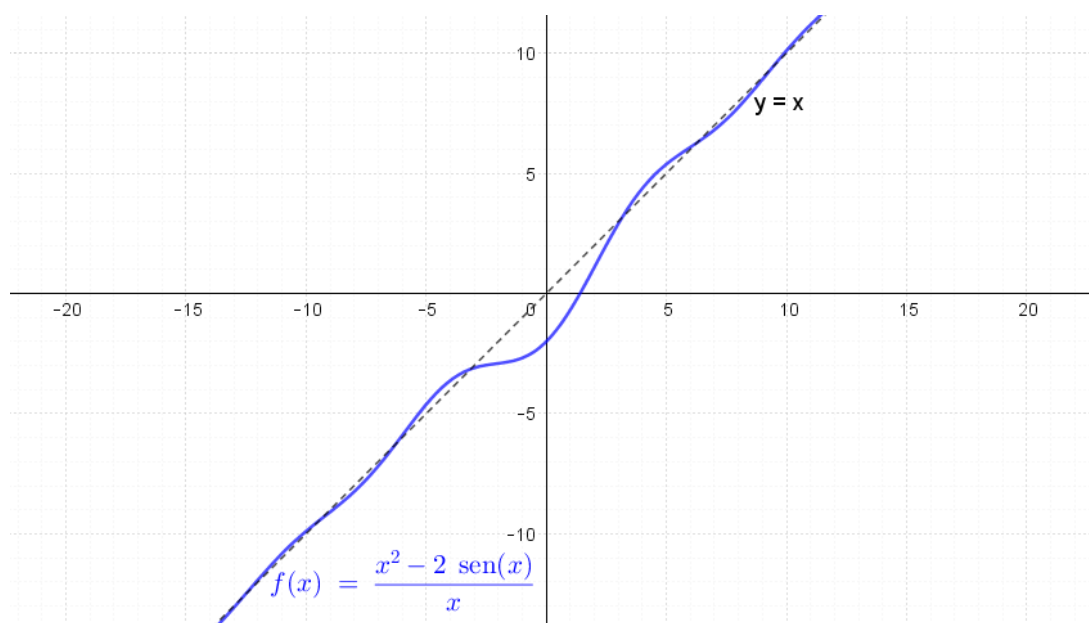
La gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en $x_1 \in (1, 2) \subset [-2, 2]$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{2\operatorname{sen} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\operatorname{sen} x}{x} = \infty - 0 = \infty \Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales

Veamos si tiene asíntota oblicua $y = mx + b$

$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2\operatorname{sen} x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\operatorname{sen} x}{x^2} = 1 - 0 = 1 \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2\operatorname{sen} x}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2\operatorname{sen} x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\operatorname{sen} x}{x} = \frac{a}{\infty} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua}$

**Ejercicio 5.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función $f(x) = x^{\ln x}$, se pide:

- (1 punto) Comportamiento de la función en las proximidades de $x = 0$.
- (1 punto) Encuentra la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = e$.
- (0,5 puntos) Justifica si existe algún punto en el que la recta tangente a $f(x)$ sea paralela al eje OX.

Solución:

$$f(x) = x^{\ln x} \rightarrow \text{Dom } f = (0, +\infty)$$

Veamos cómo se comporta $f(x)$ en las proximidades de $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = (\text{indeterminación } 0^0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = A \Rightarrow \ln A = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^{\ln x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = e^{+\infty} = +\infty$$

La recta tangente en $x = e$ tiene pendiente $f'(e)$

$$y = x^{\ln x} \rightarrow \ln y = \ln(x^{\ln x}) \rightarrow \ln y = (\ln x)^2 \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2 \ln x}{x} \rightarrow y' = \frac{2 \ln x}{x} \cdot y \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \cdot x^{\ln x}$$

$$r_{tg} \equiv \begin{cases} \text{punto de tangencia: } (e, f(e)) = (e, e^{\ln e}) = (e, e) \\ \text{pendiente: } m = f'(e) = \frac{2 \ln e}{e} \cdot e^{\ln e} = 2 \end{cases} \Rightarrow r_{tg} \equiv y - e = 2(x - e) \Rightarrow r_{tg} \equiv y = 2x - e$$

Los puntos en los que la recta tangente es paralela al eje OX cumplen $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2\ln x}{x} \cdot x^{\ln x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x=1$

En el punto $x=1$ la recta tangente es paralela al eje OX

