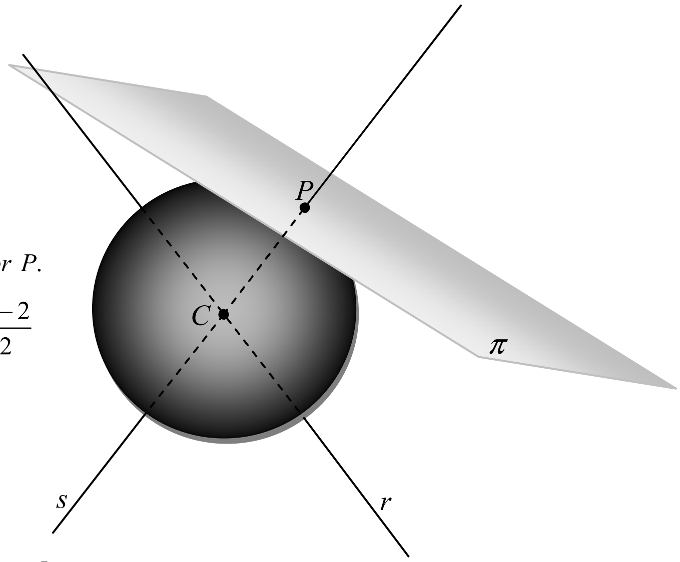
Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula la ecuación de una esfera que tiene su centro en la recta $r \equiv x-3 = y = \frac{z}{2}$, y es tangente al plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 4 = 0$ en el punto $P(1,2,2)$.



Solución:

$r \equiv x-3 = y = \frac{z}{2}$, $P(1,2,2)$, $\pi \equiv 2x - y + 2z - 4 = 0$

Calculamos la recta s perpendicular al plano π y que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vector normal al plano, } \vec{\eta} = (2,-1,2) \\ \text{Punto } P(1,2,2)\end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

El centro C de la esfera será el punto de corte entre r y s

$$r \equiv x-3 = y = \frac{z}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-3 = y \\ y = \frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{2} \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

$$r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ 2y-z=0 \\ x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases} , \quad |\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -2+4-12 \neq 0$$

Entonces $Rang\,\overline{A} = 4 > Rang\,A \Rightarrow$ *Sistema incompatible* $\Rightarrow$ *r y s no se cortan y el problema no tiene solución.*

Nota

Si la recta r hubiera tenido por ecuación $r \equiv x-3 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$

$$r \equiv x-3 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-3 = \frac{y-2}{-1} \\ x-3 = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

$$r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \\ x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases} , \quad |\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{F_2=F_2-F_4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad Rang\,A = 3 \text{ puesto que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces $Rang\,\overline{A} = 3 = Rang\,A \Rightarrow$ *Sistema compatible determinado.* $C = \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \\ x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow C = (5,0,6)$

Ahora el radio de la esfera será $|\overrightarrow{PC}|$, $\overrightarrow{PC} = (4,-2,4) \Rightarrow R = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{16+4+16} = 6$

y la ecuación de la esfera es $S \equiv (x-5)^2 + y^2 + (z-6)^2 = 36$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dados los puntos $A(1,-1,1)$, $B(1,2,2)$, $C(2,1,1)$, se pide:

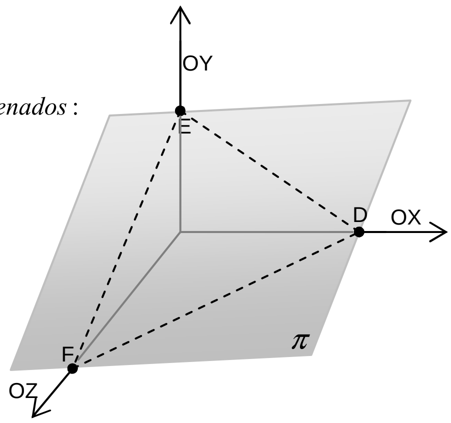
- Encuentra la ecuación del plano π que contiene a A, B, y C.
- Calcula el área del triángulo que forman las intersecciones de π con los ejes de coordenadas.
- Halla las coordenadas del punto P que equidista de los puntos A, B y C y es coplanario con ellos.

Solución:

$A(1,-1,1)$, $B(1,2,2)$, $C(2,1,1)$

Para encontrar la ecuación del plano que determinan A, B y C necesitamos un punto y dos vectores con direcciones diferentes:

$$\pi \equiv \begin{cases} \text{punto } A(1,-1,1) \\ \text{vector } \overrightarrow{AB}=(0,3,1) \\ \text{vector } \overrightarrow{AC}=(1,2,0) \end{cases} \Rightarrow \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv -2x+y-3z+6=0$$



Vamos a calcular los cortes del plano $\pi \equiv -2x+y-3z+6=0$ con los ejes coordenados:

$$\text{Eje } OX \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D=\pi \cap OX \quad \begin{cases} -2x+y-3z+6=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D(3,0,0)$$

$$\text{Eje } OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E=\pi \cap OY \quad \begin{cases} -2x+y-3z+6=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E(0,-6,0)$$

$$\text{Eje } OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow F=\pi \cap OZ \quad \begin{cases} -2x+y-3z+6=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow F(0,0,2)$$

$$\text{Área del triángulo } DEF = \frac{\left|\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DF}\right|}{2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DE}=(-3,-6,0) \\ \overrightarrow{DF}=(-3,0,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12\vec{e}_1+6\vec{e}_2-18\vec{e}_3$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{(-12)^2+6^2+(-18)^2}}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}\ u^2$$

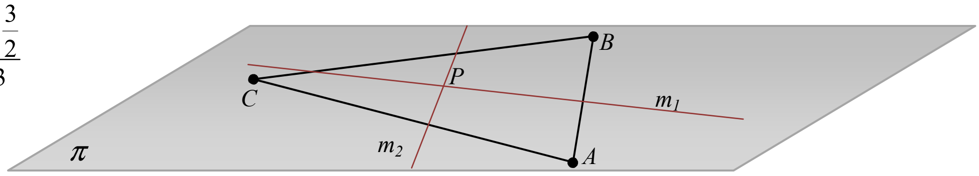
Para calcular P, punto que equidista de A, B, C tenemos más de un camino:

podemos obtener P como el punto de corte de las mediatrices, contenidas en π, de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

$$m_1\left(\text{mediatriz de } \overline{AB}\right) \equiv \begin{cases} \text{punto } M_1, \text{ punto medio de } A \text{ y } B \Rightarrow M_1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \text{vector } \vec{v} \text{ perpendicular a } \overrightarrow{AB} \text{ y al vector normal al plano } \pi, \vec{\eta}=(-2,1,-3) \end{cases}$$

$$\vec{v}' = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\eta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\vec{e}_1-2\vec{e}_2+6\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v}'=(-10,-2,3) \ , \ \vec{v}=(5,1,-3) \text{ tiene la misma dirección.}$$

$$m_1 \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-\frac{3}{2}}{-3}$$



$$m_2\left(mediatriz\ de\ \overline{AC}\right)\equiv\begin{cases} punto\ M_2,\ punto\ medio\ de\ A\ y\ C\ \Rightarrow\ M_2\left(\dfrac{3}{2},0,1\right)\\ vector\ \vec{u}\ perpendicular\ a\ \overrightarrow{AC}\ y\ al\ vector\ normal\ al\ plano\ \pi,\ \vec{\eta}=(-2,1,-3)\end{cases}$$

$$\vec{u}=\overrightarrow{AC}\wedge\vec{\eta}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=-6\vec{e}_1+3\vec{e}_2+5\vec{e}_3\ \Rightarrow\ \vec{u}=(-6,3,5)\ ,\ m_2\equiv\frac{x-\frac{3}{2}}{-6}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{5}$$

Ahora $P=m_1\cap m_2$; *para cortar las rectas podemos ponerlas en parámetricas e igualar:*

$$m_1\equiv\begin{cases}x=1+5\lambda\\ y=\dfrac{1}{2}+\lambda\\ z=\dfrac{3}{2}-3\lambda\end{cases}\ ,\quad m_2\equiv\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}-6\mu\\ y=3\mu\\ z=1+5\mu\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}1+5\lambda=\dfrac{3}{2}-6\mu\\ \dfrac{1}{2}+\lambda=3\mu\\ \dfrac{3}{2}-3\lambda=1+5\mu\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}5\lambda+6\mu=\dfrac{1}{2}\\ \lambda-3\mu=-\dfrac{1}{2}\\ 3\lambda+5\mu=\dfrac{1}{2}\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}de\ las\ dos\ primeras\\ ecuaciones\ obtenemos:\\ \lambda=-\dfrac{1}{14}\ ,\ \mu=\dfrac{2}{14}\end{cases}$$

sustituímos el valor de λ *en* m_1 *o el valor de* μ *en* m_2 *y obtenemos las coordenadas de P.*

$$Si\ \mu=\frac{2}{14}\ \Rightarrow\ P\left(\frac{3}{2}-6\cdot\frac{2}{14},3\cdot\frac{2}{14},1+5\cdot\frac{2}{14}\right)\ \Rightarrow\ P\left(\frac{9}{14},\frac{6}{14},\frac{24}{14}\right)\ \Rightarrow\ P\left(\frac{9}{14},\frac{3}{7},\frac{12}{7}\right)$$

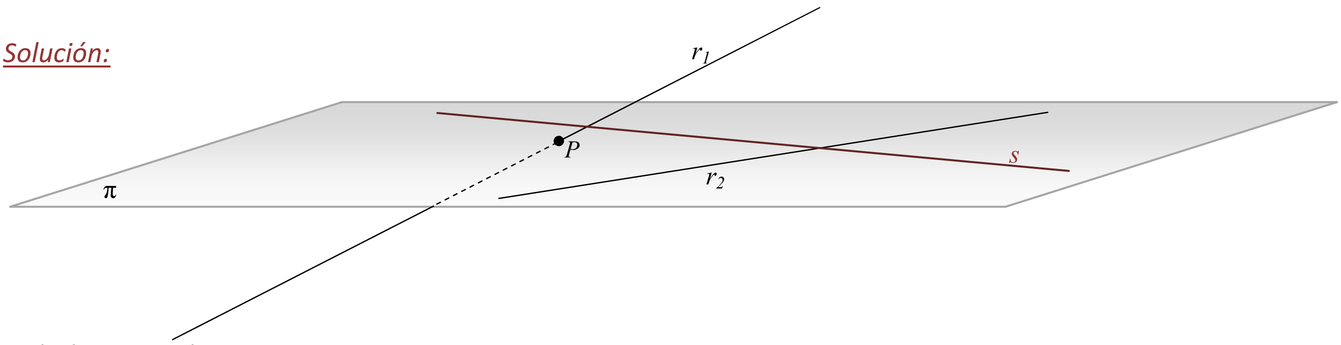
Otro camino sería imponer a P que esté contenido en el plano π *(poniendo* π *en paramétricas), calcular los vectores* $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ *y* $\overrightarrow{CP}$ *y resolver el sistema* $\begin{cases}\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{BP}\right|\\ \left|\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{CP}\right|\end{cases}$

En cualquier caso el punto P será el circuncentro del triángulo ABC.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Hallar las coordenadas de un punto P que está en la recta $r_1\equiv\begin{cases}x-z=0\\ y+z=-1\end{cases}$, y que determina con la recta $r_2\equiv\begin{cases}2x+z=-2\\ x+y=0\end{cases}$ un plano que contiene a la recta $s\equiv\begin{cases}x=-2\\ y-z=0\end{cases}$.

Solución:



Calculamos un plano π *que contiene a* r_2 *y a s:*

$$r_2\equiv\begin{cases}2x+z=-2\\ x+y=0\end{cases}\ \Rightarrow\ r_2\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}Q(0,0,-2)\ es\ un\ punto\ de\ r_2\\ \vec{u}=(1,-1,-2)\ es\ un\ vector\ con\ la\ dirección\ de\ r_2\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}x=-2\\ y=z\end{cases}\ \Rightarrow\ s\equiv\begin{cases}x=-2\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\ \Rightarrow\ \vec{v}=(0,1,1)\ es\ un\ vector\ con\ la\ dirección\ de\ s$$

$$\begin{cases}\pi\equiv\begin{vmatrix}x & y & z+2\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\\ \pi\equiv x-y+z+2=0\end{cases}$$

Ahora P será el punto de intersección entre la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=-1 \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv x-y+z+2=0$

$$P \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=-1 \\ x-y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow x=-1 \ , \ y=0 \ , \ z=-1 \quad \Rightarrow P(-1,0,-1)$$

$-$ *P es un punto de* r_1 *porque es la intersección de la recta y el plano.*
$-$ *El plano que determina P con* r_2 *es* π.
$-$ *La recta s está contenida en el plano* π.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se consideran las rectas $r \equiv \dfrac{x-4}{2} = y-4 = z \ , \ s \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=3 \\ z=1+\lambda \end{cases}$.

- Determinar la posición relativa de las dos rectas.
- Calcular la distancia entre ambas rectas.
- Hallar la ecuación de la perpendicular común a *r* y *s*.

Solución:

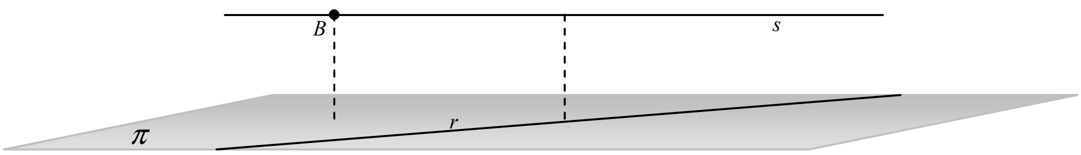
$$r \equiv \frac{x-4}{2} = y-4 = z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{punto de } r, \ A(4,4,0) \\ \text{vector de } r, \ \vec{u}=(2,1,1) \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=3 \\ z=1+\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{punto de } s, \ B(-2,3,1) \\ \text{vector de } s, \ \vec{v}=(3,0,1) \end{cases}$$

como $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son proporcionales* $\Rightarrow$ *r y s no son rectas paralelas.*

Si el vector $\overrightarrow{AB}$, *determinado por los puntos* $A \in r$ *y* $B \in s$, *es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *las dos rectas son coplanarias y se cortan en un punto. Pero si* $\overrightarrow{AB}$ *es linealmente independiente con* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *las rectas están en distinto plano y se cruzan.*

$$\overrightarrow{AB}=(-6,-1,1) \ ; \ \begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}, \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes} \Rightarrow \quad r \text{ y } s \text{ están en distinto plano.}$$

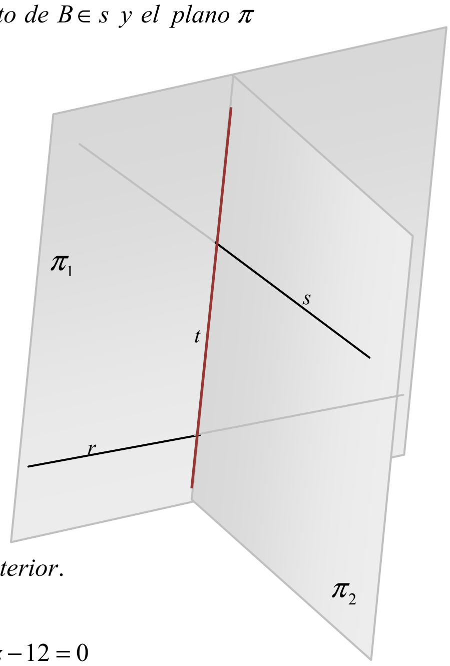
Para calcular la distancia entre r y s, hallamos la ecuación de un plano π *que contenga a una de las dos rectas (p. ej. a r) y sea paralelo a la otra (s)*



$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } r \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } A(4,4,0) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u}=(2,1,1) \end{cases} \\ \text{es paralelo a la recta } s \Rightarrow \text{tiene la dirección del vector } \vec{v}=(3,0,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv x+y-3z-8=0$$

Ahora la distancia entre las dos rectas será igual a la distancia entre un punto de $B \in s$ *y el plano* π



$$d(s,r) = d(B,\pi) = \frac{|1\cdot(-2)+1\cdot 3-3\cdot 1-8|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{11}}u$$

Para calcular la perpendicular común a las dos rectas vamos a construir dos planos, π_1 *y* π_2*, de tal forma que:* $\pi_1 \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } r \\ \text{contiene al vector } \vec{u}\wedge\vec{v} \end{cases}$ *y*

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } s \\ \text{contiene al vector } \vec{u}\wedge\vec{v} \end{cases}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \;\Rightarrow\; \vec{u}\wedge\vec{v} = (1,1,-3),$$

como vemos $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{\eta}$ *vector normal al plano* π *calculado en el apartado anterior.*

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} A(4,4,0) \\ \vec{u} = (2,1,1) \\ \vec{u}\wedge\vec{v} = (1,1,-3) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv -4x+7y+z-12=0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} B(-2,3,1) \\ \vec{v} = (3,0,1) \\ \vec{u}\wedge\vec{v} = (1,1,-3) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv -x+10y+3z-35=0$$

Ahora la recta t*, perpendicular común a* r *y* s*, se obtiene como* $t = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow t \equiv \begin{cases} -4x+7y+z+12=0 \\ -x+10y+3z-35=0 \end{cases}$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,-1)$, es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z+1=0$.

Solución:

El plano que nos piden, π'*, al ser paralelo a la recta* r*, contiene al vector director de esta recta.* $r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$

la dirección de la recta r *viene determinada por el vector* $\vec{u}=(2,1,0)$.

Como el plano π' *debe ser perpendicular al plano* π*, el vector normal al plano* π *estará contenido en* π' $\Rightarrow$ $\pi \equiv 2x-y+z+1=0 \Rightarrow \vec{\eta}=(2,-1,1)$; *y como el plano* π' *tiene que pasar por el punto* $P(1,0,-1)$ *ya tenemos los elementos necesarios para calcular su ecuación:*

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(1,0,-1) \\ \vec{u}=(2,1,0) \\ \vec{\eta}=(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x-2y-4z-5=0$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv x+1=\dfrac{y-3}{n}=\dfrac{z}{2}$

- Hallar n para que r y s sean paralelas.
- Para el valor de n obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas.
- Para ese mismo valor de n, calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

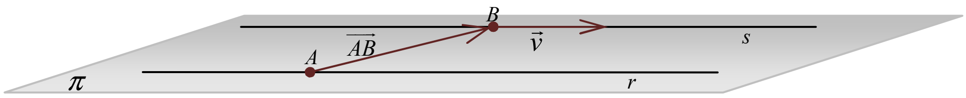
$r \equiv \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow$ *pasando a las ecuaciones paramétricas* $\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,-2,1) \text{ punto de } r \\ \vec{u}=(1,1,2) \text{ vector de } r \end{cases}$

$s \equiv x+1=\dfrac{y-3}{n}=\dfrac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} B(-1,3,0) \text{ punto de } s \\ \vec{v}=(1,n,2) \text{ vector de } s \end{cases}$

Para que r *y* s *sean paralelas,* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *deben ser proporcionales* $\Rightarrow \dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{2} \Rightarrow n=1$

El plano π *que contiene a* r *y a* s*, estará determinado por un punto,* $A\in r$ *o* $B\in s$*, y dos vectores con direcciones diferentes, uno* $\vec{v}$ *y el otro* $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=(-1,5,-1)$; $\pi \equiv \begin{cases} A(0,-2,1) \\ \overrightarrow{AB}=(-1,5,-1) \\ \vec{v}=(1,1,2) \end{cases} \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi \equiv 11x+y-6z+8=0$



Para calcular la distancia entre r *y* s*, hallamos la ecuación de un plano* π' *que contenga a una de las dos rectas* $(p.\ ej.\ a\ r)$ *y sea perpendicular al plano* π*, es decir, que contenga al vector* $\vec{\eta}=(11,1,-6)$*, normal a* π.

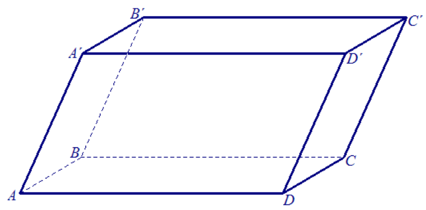
$\pi' \equiv \begin{cases} A(0,-2,1) \\ \vec{v}=(1,1,2) \\ \vec{\eta}=(11,1,-6) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 11 & 1 & -6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi' \equiv -4x+14y-5z+33=0$

Ahora tenemos que $d(r,s)=d(B,\pi')=\dfrac{|(-4)\cdot(-1)+14\cdot 3-5\cdot 0+33|}{\sqrt{(-4)^2+14^2+(-5)^2}}=\dfrac{79}{\sqrt{237}}=\dfrac{\sqrt{237}}{3}u$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea el paralelepípedo de vértices $ABCDA'B'C'D'$ del que conocemos las coordenadas de los vértices $A(0,-1,1)$, $B(1,0,2)$, $D(-2,1,1)$, $A'(1,1,-1)$. Se pide:

- Calcular el volumen de dicho paralelepípedo.
- Obtener la ecuación del plano que contiene a la cara $CDD'C'$.
- Determinar las coordenadas del punto medio de la arista $B'C'$ expresadas en el sistema de referencia $\Re=\left\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right\}$.

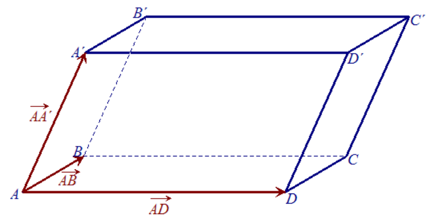


Solución:

$A(0,-1,1)$, $B(1,0,2)$, $D(-2,1,1)$, $A'(1,1,-1)$

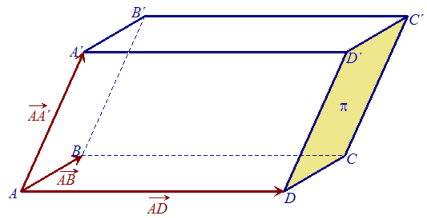
Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,2,0)$, $\overrightarrow{AA'}=(1,2,-2)$, *y el volumen del paralelepípedo será:*

$$V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right]\right|=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AA'}\right)=\left\|\begin{matrix}1&1&1\\-2&2&0\\1&2&-2\end{matrix}\right\|=|-14|=14\,u^3$$

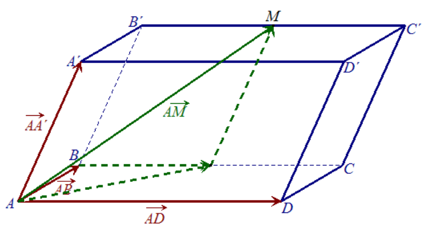


Llamamos π *al plano que contiene a la cara* $CDD'C'$

$$\pi\equiv\begin{cases}\text{contiene al punto } D(-2,1,1)\\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=(1,1,1)\\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}=(1,2,-2)\end{cases}\Rightarrow\quad \pi\equiv\begin{vmatrix}x+2&y-1&z-1\\1&1&1\\1&2&-2\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad \pi\equiv-4x+3y+z-12=0$$



Para encontrar las coordenadas del punto medio del lado $B'C'$, *que llamamos* M, *debemos conseguir las coordenadas del vector* $\overrightarrow{AM}$ *en el sistema de referencia* $\Re$, *es decir, hay que poner el vector* $\overrightarrow{AM}$ *como combinación lineal de los vectores* $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right\}$ *que forman la base del sistema de referencia con origen en el punto A.*



Primero buscamos el vector que une el punto A con el punto medio del lado BC. Ese vector se obtiene como $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Si a este vector le sumamos el vector $\overrightarrow{AA'}$ *conseguimos el vector* $\overrightarrow{AM}$. *Entonces* $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$, *por tanto:*

$\overrightarrow{AM}=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ *en la base* $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right\} \Rightarrow M\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ *en el sistema de referencia* $\Re$.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{-4}$ y el plano $\pi\equiv 2x+3y+z=0$, hallar las ecuaciones de una recta s que se apoya en r perpendicularmente y está contenida en el plano π.

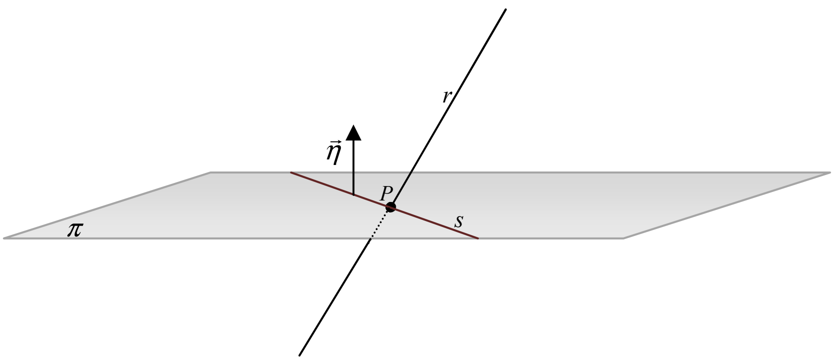
Solución:

Si la recta pedida tiene que estar contenida en el plano π, *su vector director debe ser perpendicular al vector normal al plano. Como* $\pi\equiv 2x+3y+z=0 \Rightarrow \vec{\eta}=(2,3,1)$

Como la recta s tiene que cortar a r perpendicularmente, su vector director será perpendicular al vector de r.

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{-4} \Rightarrow \vec{v}=(2,3,-4)$$

Entonces $\vec{u}'=\vec{v}\wedge\vec{\eta}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 2 & 3 & -4\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=15\vec{e}_1-10\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{u}'=(15,-10,0)\ ;\ \vec{u}=(3,-2,0)$ *tiene la misma dirección que* $\vec{u}'$.



Si s está en el plano π *y corta a la recta r, obligatoriamente tiene que pasar por el punto P, intersección entre la recta r y el plano* π.

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{-4} \Rightarrow \text{expresada en paramétricas } r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-3+3\lambda\\ z=-2-4\lambda\end{cases},\ P\in r \Rightarrow P(1+2\lambda,-3+3\lambda,-2-4\lambda)$$

$\pi\equiv 2x+3y+z=0$

$P\in\pi \Rightarrow$ *verifica la ecuación del plano:* $2(1+2\lambda)+3\cdot(-3+3\lambda)+(-2-4\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=1$, *entonces* $P(3,0,-6)$

$$\text{Ahora la recta pedida } s\equiv\begin{cases}\text{pasa por el punto } P(3,0,-6)\\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u}=(3,-2,0)\end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=3+3\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=-6\end{cases}$$

− *s corta a r en el punto P.*

− *s está contenida en* π *porque pasa por* $P\in\pi$ *y su dirección es perpendicular al vector* $\vec{\eta}$, *normal a* π.

− *s es perpendicular a r porque su vector director,* $\vec{u}$, *es perpendicular a* $\vec{v}$, *vector director de r.*