

BLOQUE DE PROBABILIDAD

Instrucciones: Debes resolver dos ejercicios, a elegir entre los tres propuestos.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Un grupo de 80 turistas ingleses se desplazan por Europa. 24 de ellos hablan alemán, 30 hablan francés y 35 hablan español. 7 de estos turistas hablan alemán y francés, 6 hablan alemán y español y 8 hablan francés y español. Finalmente, hay 2 turistas que hablan los tres idiomas. Se elige al azar uno de estos turistas.

- (0,5 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que no hable ninguno de esos tres idiomas?
- (0,5 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que hable dos de esos idiomas?
- (1 punto) Si el turista elegido habla francés, ¿cuál es la probabilidad de que también hable alemán o español?

Solución:

Tenemos los sucesos: $A = \{\text{Habla alemán}\}$, $E = \{\text{Habla español}\}$, $F = \{\text{Habla francés}\}$

Nos dan los datos:

$$P(A) = \frac{24}{80}; P(E) = \frac{35}{80}; P(F) = \frac{30}{80}; P(A \cap E) = \frac{6}{80}; P(A \cap F) = \frac{7}{80}; P(E \cap F) = \frac{8}{80}; P(A \cap E \cap F) = \frac{2}{80}$$

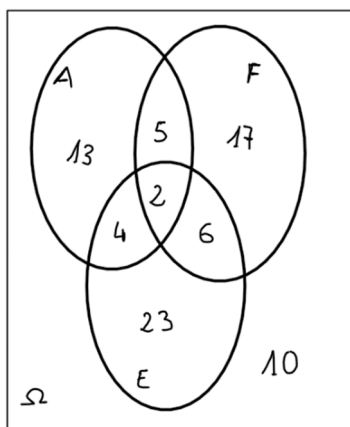
$$\text{Ahora } P(A \cup E \cup F) = P(A) + P(E) + P(F) - P(A \cap E) - P(A \cap F) - P(E \cap F) + P(A \cap E \cap F) \Rightarrow$$

$$P(A \cup E \cup F) = \frac{24}{80} + \frac{35}{80} + \frac{30}{80} - \frac{6}{80} - \frac{7}{80} - \frac{8}{80} + \frac{2}{80} = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$$

$$\text{apartado 1. } P(\bar{A} \cap \bar{E} \cap \bar{F}) = P(\overline{A \cup E \cup F}) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\text{apartado 2. } P((A \cap E) \cup (A \cap F) \cup (E \cap F)) = P(A \cap E) + P(A \cap F) + P(E \cap F) - 2P(A \cap E \cap F) = \frac{6}{80} + \frac{7}{80} + \frac{8}{80} - \frac{4}{80} = \frac{17}{80}$$

$$\text{apartado 3. } P(A \cup E / F) = P(A / F) + P(E / F) - P(A \cap E / F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(E \cap F)}{P(F)} - \frac{P(A \cap E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{7}{80} + \frac{8}{80} - \frac{2}{80}}{\frac{30}{80}} = \frac{13}{30}$$



También podemos utilizar un diagrama de Venn para resolver el problema:

Situamos en cada uno de los conjuntos el número de personas que contienen.

Ahora sólo contamos casos favorables:

$$P\{\text{No hable ninguno de los tres idiomas}\} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}$$

$$P\{\text{Hable dos idiomas}\} = \frac{4+6+5+2}{80} = \frac{17}{80}$$

$$P\{\text{Hable alemán o español sabiendo que habla francés}\} = \frac{5+2+6}{30} = \frac{13}{30}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Por los síntomas observados a un paciente se sospecha que puede tener la enfermedad A con una probabilidad de 0,6, la enfermedad B con probabilidad 0,15 y la C con probabilidad 0,25. Para precisar el diagnóstico se somete al paciente a una prueba que da positiva en el 15% de enfermos A, en el 90% de enfermos B y en el 20% de enfermos C.

- (1 punto) ¿Qué enfermedad se diagnosticará si el resultado de la prueba es positivo?
- (1 punto) ¿Qué probabilidad hay de que tenga la enfermedad A si la prueba tiene resultado negativo?

Solución:

$$\text{Definimos los sucesos: } \left. \begin{array}{l} A = \{\text{Tiene la enfermedad A}\} \rightarrow P(A) = 0,6 \\ B = \{\text{Tiene la enfermedad B}\} \rightarrow P(B) = 0,15 \\ C = \{\text{Tiene la enfermedad C}\} \rightarrow P(C) = 0,25 \\ p_+ = \{\text{Dar positivo en la prueba}\} \rightarrow P(p_+/A) = 0,15 ; P(p_+/B) = 0,9 ; P(p_+/C) = 0,2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A, B \text{ y } C \text{ son sucesos incompatibles y } A \cup B \cup C = \Omega \end{array}$$

$$P(p_+) = P(A) \cdot P(p_+/A) + P(B) \cdot P(p_+/B) + P(C) \cdot P(p_+/C) = 0,6 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,9 + 0,25 \cdot 0,2 = 0,275$$

$$\text{Apartado 1. } \left. \begin{array}{l} P(A/p_+) = \frac{P(A \cap p_+)}{P(p_+)} = \frac{P(A) \cdot P(p_+/A)}{P(p_+)} = \frac{0,6 \cdot 0,15}{0,275} = 0,327 \\ P(B/p_+) = \frac{P(B \cap p_+)}{P(p_+)} = \frac{P(B) \cdot P(p_+/B)}{P(p_+)} = \frac{0,15 \cdot 0,9}{0,275} = 0,491 \\ P(C/p_+) = \frac{P(C \cap p_+)}{P(p_+)} = \frac{P(C) \cdot P(p_+/C)}{P(p_+)} = \frac{0,25 \cdot 0,2}{0,275} = 0,182 \end{array} \right\} \text{Se diagnosticará la enfermedad B}$$

$$\text{Apartado 2. } P(A/\bar{p}_+) = \frac{P(A \cap \bar{p}_+)}{P(\bar{p}_+)} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{p}_+/A)}{P(\bar{p}_+)} = \frac{0,6 \cdot (1 - 0,15)}{1 - 0,275} = 0,703$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Supongamos que la variable que expresa el tiempo (en meses) que tarda en andar un niño sigue una distribución $N(13,2)$.

- (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que un niño ande antes de los 10 meses.
- (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño llegue al año y medio sin saber andar?
- (1 punto) Si un niño ha cumplido un año y todavía no sabe andar, ¿qué probabilidad hay de que aprenda en los próximos tres meses?

Solución:

$$\text{Apartado 1.} - P(x < 10)$$

$$N(13,2) \xrightarrow{\text{Tipificamos la variable}} N(0,1)$$

$$P(x < 10) \rightarrow P\left(z < \frac{10-13}{2}\right) = P(z < -1,5) = P(z > 1,5) = 1 - P(z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

Apartado 2.- $P(x > 18)$

$$N(13, 2) \xrightarrow{\text{Tipificamos la variable}} N(0, 1)$$

$$P(x > 18) \rightarrow P\left(z > \frac{18-13}{2}\right) = P(z > 2,5) = 1 - P(z < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$$

$$\text{Apartado 3.- } P(x < 15 / x > 12) = \frac{P(x > 12 \cap x < 15)}{P(x > 12)} = \frac{P(12 < x < 15)}{P(x > 12)} = \frac{P(x < 15) - P(x < 12)}{P(x > 12)}$$

$$N(13, 2) \xrightarrow{\text{Tipificamos la variable}} N(0, 1)$$

$$P(x < 12) \rightarrow P\left(z < \frac{12-13}{2}\right) = P(z < -0,5) = P(z > 0,5) = 1 - P(z < 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

$$P(x < 15) \rightarrow P\left(z < \frac{15-13}{2}\right) = P(z < 1) = 0,8413$$

$$P(x > 12) \rightarrow P\left(z > \frac{12-13}{2}\right) = P(z > -0,5) = P(z < 0,5) = 0,6915$$

$$P(x < 15 / x > 12) = \frac{0,8413 - 0,3085}{0,6915} = 0,7705$$

BLOQUE DE GEOMETRÍA

Instrucciones: Debes resolver tres ejercicios, a elegir entre los cuatro propuestos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dados el punto $P(2, 1, -2)$, la recta $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + 4z = 2$, se pide:

- (1,25 puntos) Halla las ecuaciones de una recta que pasa por el punto P , es paralela al plano π y corta a la recta r .
- (0,75 puntos) Encuentra el punto simétrico de P con respecto al plano π .

Solución:

La recta pedida s estará contenida en un plano π' paralelo a $\pi \equiv 2x - y + 4z = 2$

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(2, 1, -2) \\ \vec{n} = (2, -1, 4) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv 2(x-2) - (y-1) + 4(z+2) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv 2x - y + 4z + 5 = 0$$

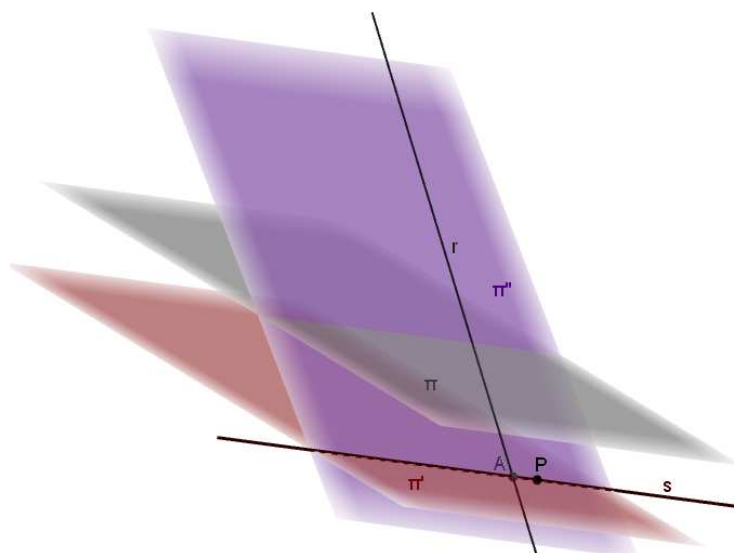
Ahora tenemos dos opciones para encontrar la recta s :

$$\text{opción 1: Calculamos un plano que contenga al punto } P(2, 1, -2) \text{ y a la recta } r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Ese plano será combinación lineal de los dos que definen la recta: $\pi'' \equiv 2x - y + z - 1 + \lambda(x + y - 2) = 0$

$$P \in \pi'' \Rightarrow 2 \cdot 2 - 1 + (-2) - 1 + \lambda(2 + 1 - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \pi'' \equiv 2x - y + z - 1 = 0$$

$$\text{La recta pedida es } s = \pi' \cap \pi'' \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x - y + 4z + 5 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$



opción 2: Calculamos el punto A, corte de la recta r con el plano π' y la recta s pasa por los puntos A y P.

$$r \equiv \begin{cases} x+y=2 & \xrightarrow{1^a+2^a} y=2-x \\ 2x-y+z=1 & \xrightarrow{1^a+2^a} 3x+z=3 \rightarrow z=3-3x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3-3\lambda \end{cases}$$

$$A \in r \Rightarrow A(\lambda, 2-\lambda, 3-3\lambda)$$

$$A \in \pi' \equiv 2x-y+4z+5=0 \Rightarrow 2\lambda-(2-\lambda)+4(3-3\lambda)+5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{15}{9}=\frac{5}{3} \Rightarrow A\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -2\right)$$

$$\text{Ahora } s \equiv \begin{cases} P(2, 1, -2) \\ \overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \xrightarrow{\text{igual dirección}} \vec{v} = (1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2 \end{cases}$$

Ahora buscamos el punto P' , simétrico del punto $P(2, 1, -2)$ con respecto del plano $\pi \equiv 2x-y+4z-2=0$

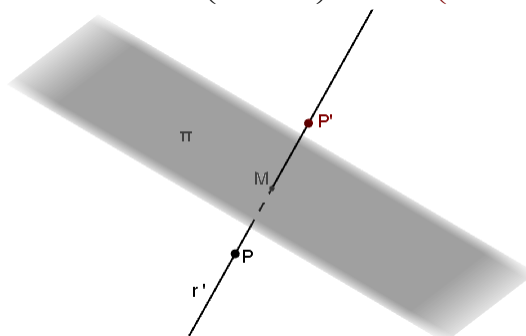
$$\text{Sea la recta } r' \equiv \begin{cases} \text{pasa por el punto } P(2, 1, -2) \\ \text{tiene la dirección del vector normal a } \pi, \vec{n} = (2, -1, 4) \end{cases} \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-2+4\lambda \end{cases}$$

M es el punto de corte entre r' y π

$$M \in r' \Rightarrow M(2+2\lambda, 1-\lambda, -2+4\lambda)$$

$$M \in \pi \equiv 2x-y+4z-2=0 \Rightarrow 2(2+2\lambda)-(1-\lambda)+4(-2+4\lambda)-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{7}{21}=\frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Como } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}) \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow P'\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4}$, $s \equiv \begin{cases} x-y-2z=7 \\ x-4y+z=4 \end{cases}$

- (1,25 puntos) Encuentra la ecuación de un plano que no corta a r ni a s y que equidista de ambas rectas.
- (0,75 puntos) Halla las ecuaciones de la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano $\pi \equiv 3x + y - z = 8$.

Solución:

$$s \equiv \begin{cases} x-y-2z=7 \\ x-4y+z=4 \end{cases} \xrightarrow{1^{\circ}-2^{\circ}} \begin{cases} 3y-3z=3 \\ x-4y+z=4 \end{cases} \rightarrow y=1+z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=8+3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } s, B(8, 1, 0) \\ \text{vector de } s, \vec{u}=(3, 1, 1) \end{cases}$$

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } r, A(-1, 2, 0) \\ \text{vector de } r, \vec{v}=(1, -1, 2) \end{cases}$$

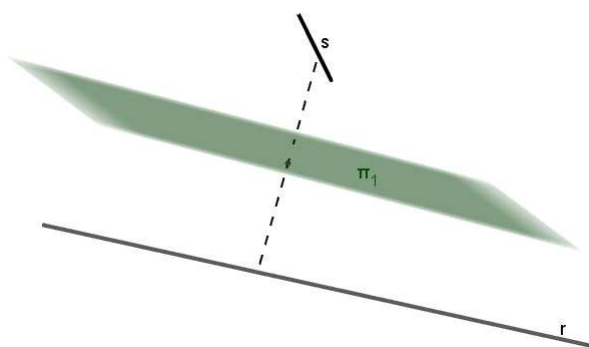
como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales $\Rightarrow r$ y s no son rectas paralelas.

El plano pedido es paralelo a las dos rectas $\Rightarrow$ su vector normal será $\vec{n}_1 = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{n}_1 = (3, -5, -4) \text{ y el plano es de la forma } \pi_1 \equiv 3x - 5y - 4z + D = 0$$

$$\text{Ahora } d(r, \pi_1) = d(s, \pi_1) \Rightarrow d(A, \pi_1) = d(B, \pi_1) \Rightarrow \frac{|3 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + D|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 \cdot 8 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + D|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2}} \Rightarrow \frac{|D-13|}{\sqrt{50}} = \frac{|D+19|}{\sqrt{50}}$$

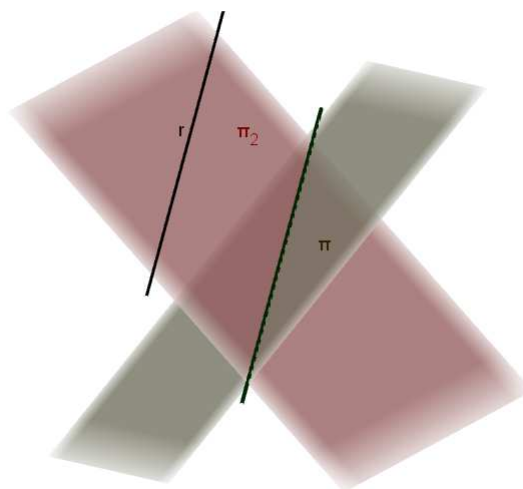
$$\Rightarrow \begin{cases} D-13 = D+19 \\ D-13 = -D-19 \end{cases} \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi_1 \equiv 3x - 5y - 4z - 3 = 0$$



Para encontrar las ecuaciones de la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano $\pi \equiv 3x + y - z = 8$, buscamos un plano π_2 que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π :

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} A(-1, 2, 0) \\ \vec{v}=(1, -1, 2) \\ \vec{n}=(3, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x - 7y - 4z + 15 = 0$$

$$\text{Ahora, la recta proyección será } \pi \cap \pi_2 \Rightarrow p \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 8 = 0 \\ x - 7y - 4z + 15 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 6.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$ y el punto $A(-1, 3, 4)$, halla el ángulo que forma el plano π_2 con la recta que pasa por A y es perpendicular a la intersección de los dos planos.

Solución:

Llamamos s a la recta intersección de los planos π_1 y π_2

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 & \xrightarrow{2 \cdot 1^a + 2^a} 5x + 5z = 5 \rightarrow x = 1 - z \\ x - 2y + z = 3 & \xrightarrow{x = 1 - z} 1 - z - 2y + z = 3 \rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

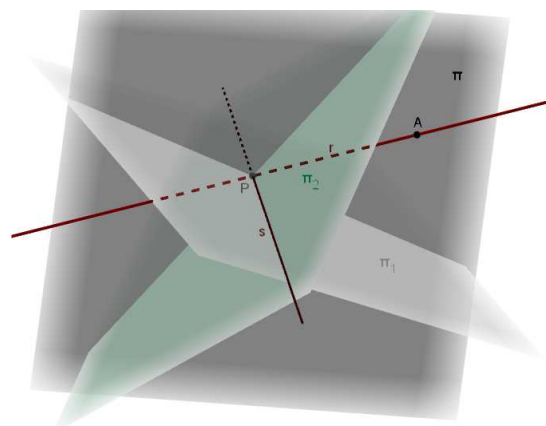
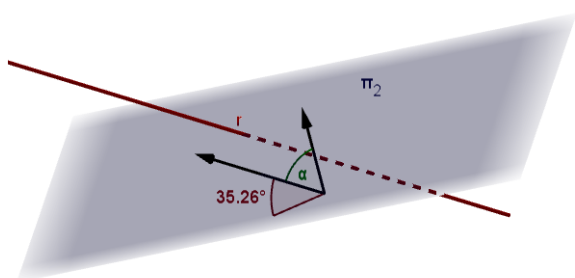
Sea π un plano perpendicular a la recta s y que contenga al punto $A(-1, 3, 4) \Rightarrow \pi \equiv 1 \cdot (x+1) + 0 \cdot (y-3) - 1 \cdot (z-4) = 0$
 $\pi \equiv x - z + 5 = 0$

Calculamos el punto de corte entre la recta s y el plano π . $P = s \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} P \in s \Rightarrow P(1-\lambda, -1, \lambda) \\ P \in \pi \Rightarrow 1-\lambda - \lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow P(-2, -1, 3)$

Ahora la recta r , perpendicular a s y que pasa por A , tiene la dirección del vector $\overrightarrow{AP} = (-1, -4, -1)$ y el ángulo que forma con el plano $\pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$ será el complementario del que forman los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{n}_2 = (1, -2, 1)$

$$|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_2| = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|-1+8-1|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,74^\circ$$

El ángulo pedido es $(90^\circ - \alpha) = 35,26^\circ$



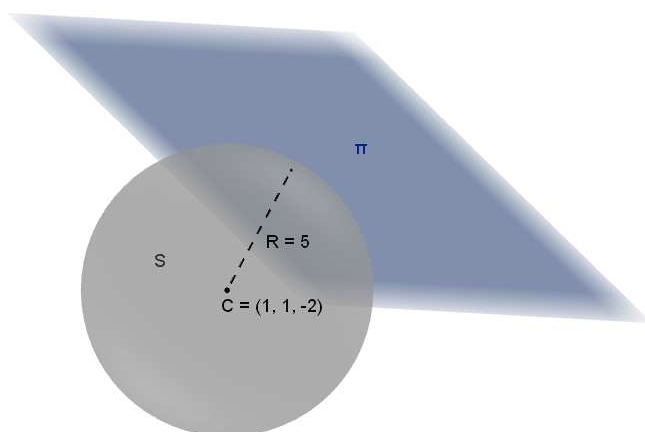
Ejercicio 7. (Puntuación máxima: 2 puntos)

- (0,75 puntos) Halla la ecuación de la esfera de centro $C(1, 1, -2)$ y que es tangente al plano $\pi \equiv 3x + 4z = 20$.
- (1,25 puntos) Encuentra un plano cuya intersección con la esfera anterior sea una circunferencia de radio 3 de la que también se pide el centro.

Solución:

Tenemos el centro de la esfera $C(1, 1, -2)$ y nos falta el radio que será la distancia entre el centro y el plano tangente a la esfera, $\pi \equiv 3x + 4z - 20 = 0$

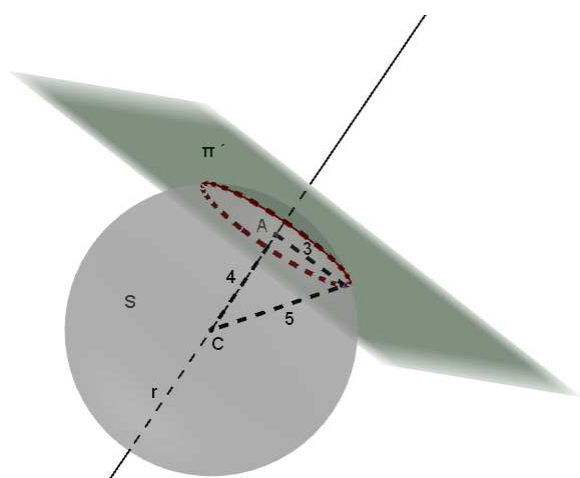
$$R = d(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 20|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5 \Rightarrow \text{La ecuación de la esfera es: } S \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$$



Hay infinitos planos que cuya intersección con la esfera S es una circunferencia de radio 3. Por comodidad tomaremos uno paralelo al plano π y cuya distancia al centro de la esfera sea 4.

$$\pi' \equiv 3x + 4z + D = 0 \rightarrow d(C, \pi') = 4 \Rightarrow \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|D-5|}{5} = 4 \Rightarrow |D-5| = 20 \Rightarrow \begin{cases} D-5=20 \rightarrow D=25 \\ D-5=-20 \rightarrow D=-15 \end{cases}$$

Nos quedamos con uno de los dos planos obtenidos, p. ej. $\pi' \equiv 3x + 4z - 15 = 0$



Las ecuaciones de la circunferencia son:

$$c \equiv \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25 \\ 3x + 4z - 15 = 0 \end{cases}$$

Para encontrar el centro A de la circunferencia, cortamos el plano π' con una recta perpendicular a él que pasa por C .

$$r \equiv \begin{cases} \text{punto } C(1, 1, -2) \\ \text{vector } \vec{n} = (3, 0, 4) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 \\ z = -2 + 4\lambda \end{cases}$$

$$A \in r \Rightarrow A(1+3\lambda, 1, -2+4\lambda)$$

$$A \in \pi' \Rightarrow 3(1+3\lambda) + 4(-2+4\lambda) - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}$$

$$A\left(\frac{17}{5}, 1, \frac{6}{5}\right)$$