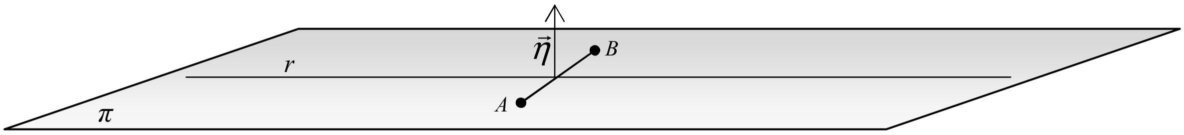
Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Los puntos $A=(1,0,-2)$ y $B=(-5,0,0)$ pertenecen al plano $\pi \equiv x-2y+3z+5=0$. Halla las ecuaciones de la recta contenida en π que es mediatriz del segmento AB.

Solución:



$A(1,0,-2)$, $B(-5,0,0)$, $\pi \equiv x-2y+3z+5=0$

La mediatriz del segmento AB, que está contenida en el plano π, es una recta perpendicular al segmento y al vector normal al plano, $\vec{\eta}=(1,-2,3)$.

$\overrightarrow{AB}=(-6,0,2)$, *un vector con la misma dirección que* $\overrightarrow{AB}$ *es* $\vec{u}=(-3,0,1)$

El vector director de la mediatriz r será $\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{\eta}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=2\vec{e}_1+10\vec{e}_2+6\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v}=(2,10,6)$

La recta pedida será: $r\equiv\begin{cases} \text{pasa por el punto medio del segmento } AB,\ M(-2,0,1) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{v}=(2,10,6), \text{ o de } \vec{w}=(1,5,3) \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Halla el valor del parámetro a para que los tres planos

$\pi_1 \equiv x+y+az=1$, $\pi_2 \equiv ax+y+z=1$, $\pi_3 \equiv 2x+y+z=a$, tengan una recta en común y calcula el punto simétrico de $P(1,0,-2)$ respecto de dicha recta.

Solución:

Para que los tres planos tengan una recta en común es necesario que el sistema formado por las tres ecuaciones sea compatible indeterminado con $rang A = rang\bar{A}=2$

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=a \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como } rang A=2 \Rightarrow |A|=0\ ;\ |A|=a^2-3a+2\ ,\ a^2-3a+2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$Si\ a=2 \Rightarrow \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y podemos encontrar } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \text{ con lo que tenemos que } rang\bar{A}=3$$

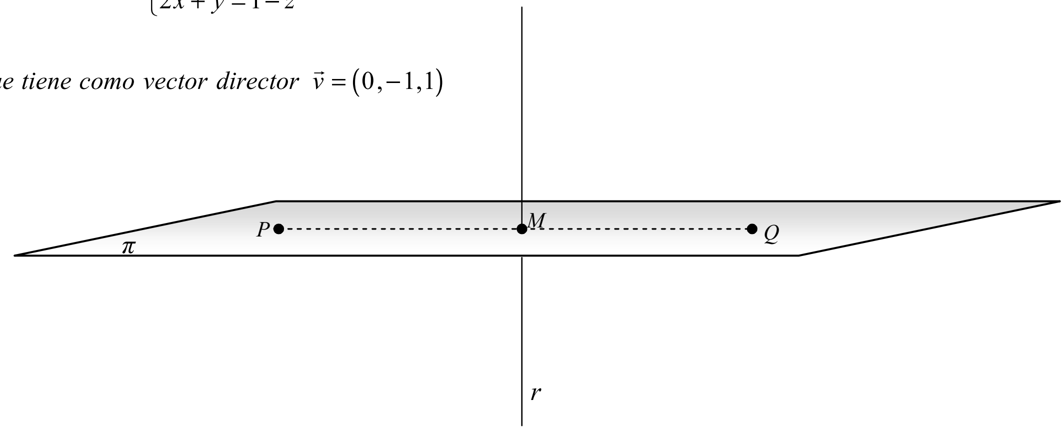
y el sistema es incompatible $\Rightarrow$ *los tres planos no tienen una recta común.*

Si $a=1 \;\Rightarrow\; \overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}$, *no hay menores de orden* 3 *distintos de cero y* $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$ *con lo que*

$rangA = rang\overline{A} = 2$ *y la recta común será* $r\equiv\begin{cases}x+y+z=1\\2x+y+z=1\end{cases}$; *si resolvemos el sistema obtendremos las*

ecuaciones paramétricas de $r \Rightarrow \begin{cases}x+y=1-z\\2x+y=1-z\end{cases}$, *restando las ecuaciones tenemos que* $x=0$, $y=1-z$

$\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=0\\y=1-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$ *que tiene como vector director* $\vec{v}=(0,-1,1)$



Para calcular Q, *simétrico de* P *con respecto a* r, *tomamos un plano* π, *perpendicular a* r *y que contiene a* P.
La intersección entre r *y* π *será el punto* M, *punto medio del segmento* PQ.
El plano π *tiene como vector normal a* $\vec{v}=(0,-1,1)$ *y contiene a* $P(1,0,-2) \;\Rightarrow\; \pi\equiv 0\cdot(x-1)-1\cdot(y-0)+1\cdot(z+2)=0$
$\pi\equiv -y+z+2=0$

$$M=r\cap\pi \;\Rightarrow\; \begin{cases}\text{como } M \text{ está en } r, \text{ es de la forma } M(0,1-\lambda,\lambda)\\ \text{como } M \text{ está en } \pi, \text{ verifica su ecuación}: -(1-\lambda)+\lambda+2=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \;\Rightarrow\; M\left(0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Ahora $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=2\cdot\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=2\cdot\left(0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)-(1,0,-2) \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=(-1,3,1) \Rightarrow Q(-1,3,1)$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula la ecuación de la recta r, que corta a las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x=0\\z=1\end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases}x=2z-3\\y=1\end{cases}$, y es paralela a la recta $s\equiv x=-y=z$.

Solución:

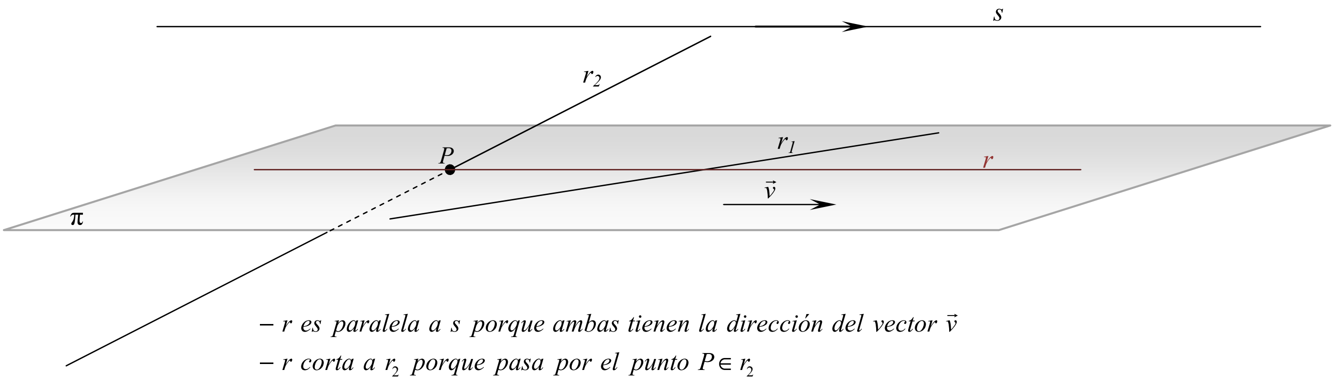
Calculamos un plano π *que contiene a* r_1 *y es paralelo a* s:

$$\left.\begin{array}{l} r_1\equiv\begin{cases}x=0\\z=1\end{cases} \Rightarrow r_1\equiv\begin{cases}x=0\\y=\lambda\\z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Q(0,0,1) \text{ es un punto de } r_1\\ \vec{u}=(0,1,0) \text{ es un vector con la dirección de } r\end{cases} \\ s\equiv x=-y=z \Rightarrow s\equiv\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1} \Rightarrow \vec{v}=(1,-1,1) \text{ es un vector con la dirección de } s\end{array}\right\} \pi\equiv\begin{vmatrix}x&y&z-1\\0&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv x-z+1=0$$

$$r_2\equiv\begin{cases}x=2z-3\\y=1\end{cases} \Rightarrow r_2\equiv\begin{cases}x=-3+2\lambda\\y=1\\z=\lambda\end{cases}$$

$$P=r_2\cap\pi \Rightarrow \begin{cases}\text{como } P \text{ está en } r_2 \Rightarrow P \text{ es de la forma } P(-3+2\lambda,1,\lambda)\\ \text{como } P \text{ está en } \pi, \text{ verifica su ecuación}: (-3+2\lambda)-\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=2\end{cases} , \text{ entonces } P(1,1,2)$$

$$\text{Ahora la recta pedida será } r\equiv\begin{cases}\text{contiene a } P(1,1,2)\\ \text{tiene la dirección de } \vec{v}=(1,-1,1)\end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$$



$-$ *r es paralela a s porque ambas tienen la dirección del vector* $\vec{v}$

$-$ *r corta a* r_2 *porque pasa por el punto* $P\in r_2$

$-$ *r corta a* r_1 *porque ambas están en el plano* π *y no son paralelas*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$.

- Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.
- Calcular el punto P, contenido en el plano determinado por los puntos A, B y C tal que el segmento PD sea la altura relativa al vértice D
- Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

Solución:

$$A(1,0,0)\ ;\ B(1,1,1)\ ;\ C(-2,1,0)\ ;\ D(0,1,3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0,1,1)\ ;\ \overrightarrow{AC}=(-3,1,0)\ ;\ \overrightarrow{AD}=(-1,1,3)$$

$$\text{Área (del triángulo } ABC)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2}u^2$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 0 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{e}_1-3\vec{e}_2+3\vec{e}_3 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-1,-3,3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{19}$$

$$\text{Volumen (tetraedro } ABCD)=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot|7|=\frac{7}{6}u^3$$

$$\pi \text{ es el plano determinado por los puntos } A, B \text{ y } C \Rightarrow \pi\equiv\begin{cases}\text{contiene al punto } A(1,0,0)\\ \text{contiene los vectores } \overrightarrow{AB}=(0,1,1) \text{ y } \overrightarrow{AC}=(-3,1,0)\end{cases}$$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 0 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv x+3y-3z-1=0$$

$$\text{Sea } r \text{ la recta perpendicular al plano } \pi \text{ y que contiene al punto } D \Rightarrow r\equiv\begin{cases}D(0,1,3)\\ \vec{\eta}=(1,3,-3)\end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=3-3\lambda\end{cases}$$

$$\text{Ahora } P=r\cap\pi \Rightarrow \begin{cases}P\in r \Rightarrow P(\lambda,1+3\lambda,3-3\lambda)\\ P\in\pi \Rightarrow \lambda+3(1+3\lambda)-3(3-3\lambda)-1=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{7}{19}\end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{7}{19},\frac{40}{19},\frac{36}{19}\right)$$

Las rectas AC y BD son rectas que se cruzan. Para calcular la distancia entre ambas, calculamos un plano que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra.

$$\text{Tomamos } \pi, \text{ plano que } \begin{cases} \text{contiene a la recta } AC \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } A(1,0,0) \\ \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \end{cases} \\ \text{es paralelo a la recta } BD \Rightarrow \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{BD} = (-1,0,2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi \equiv 2x + 6y + z - 2 = 0$

Ahora la distancia entre las dos rectas será igual a la distancia entre un punto de BD y el plano π

$$d(AC, BD) = d(B, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{41}} u$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

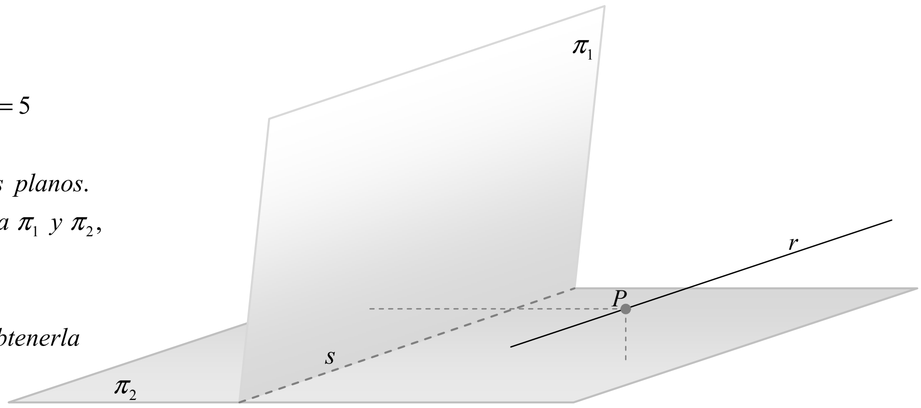
Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$, y pasa por el punto $P = (2, -1, 5)$. Calcular también la distancia de dicha recta a los dos planos.

Solución:

$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$

Si s es la recta intersección de los dos planos.
La recta pedida r, como es paralela a π_1 y π_2, también es paralela a s.

La dirección de la recta r podemos obtenerla de dos formas:



$$1.- \text{a partir de las ecuaciones paramétricas de } s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{resolviendo el sistema} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 - \frac{8}{5}\lambda \\ y = 1 - \frac{1}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

con lo que la dirección de la recta s viene determinada por el vector $\vec{u} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}, 1\right)$ *o por* $\vec{v} = 5\vec{u} = (-8, -1, 5)$

2.- *como s está contenida en π_1 y en π_2, su dirección es perpendicular a los vectores normales de ambos planos* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\eta}_1 \wedge \vec{\eta}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v} = (-8, -1, 5)$$

$$\text{Ahora la recta } r \equiv \begin{cases} \text{pasa por el punto } P(2,-1,5) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{v} = (-8,-1,5) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

Para calcular la distancia de la recta r a los planos usamos la fórmula de disancia de un punto a un plano.

$$d(r,\pi_1)=d(P,\pi_1)=\frac{|2-3\cdot(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{11}}u \quad ; \quad d(r,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|2\cdot 2-1\cdot(-1)+3\cdot 5-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{14}}u$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x-2y=-1\\ y-z=1\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x+y=0\\ z=3\end{cases}$

- Comprobar si las dos rectas son paralelas.
- Determinar, si es posible, la ecuación del plano que las contiene.
- Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

$$r\equiv\begin{cases}x-2y=-1\\ y-z=1\end{cases} \Rightarrow \text{ pasando a las ecuaciones paramétricas } \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A(-1,0,-1) \text{ punto de } r\\ \vec{u}=(2,1,1) \text{ vector de } r\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}x+y=0\\ z=3\end{cases} \Rightarrow \text{ pasando a las ecuaciones paramétricas } \Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=-\lambda\\ y=\lambda\\ z=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B(0,0,3) \text{ punto de } s\\ \vec{v}=(-1,1,0) \text{ vector de } s\end{cases}$$

como $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son proporcionales* $\Rightarrow$ *r y s no son rectas paralelas.*

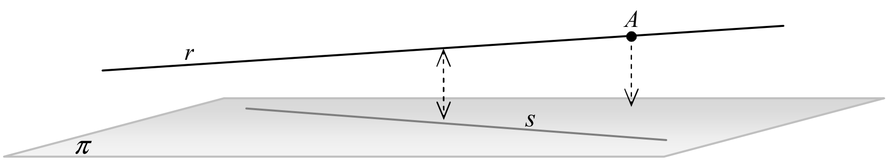
Si el vector $\overrightarrow{AB}$, *determinado por los puntos* $A\in r$ *y* $B\in s$, *es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *las dos rectas son coplanarias y se cortan en un punto. Pero si* $\overrightarrow{AB}$ *es linealmente independiente con* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *las rectas están en distinto plano y se cruzan.*

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,4) \;;\; \begin{vmatrix}1&0&4\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=11\neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB},\vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes} \Rightarrow \text{No existe un plano que contenga a } r \text{ y } s.$$

Para calcular la distancia entre r y s, hallamos la ecuación de un plano π *que contenga a una de las dos rectas (p. ej. a s) y sea paralelo a la otra (r)*

$$\pi\equiv\begin{cases}B(0,0,3)\\ \vec{v}=(-1,1,0)\\ \vec{u}=(2,1,1)\end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x&y&z-3\\-1&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv x+y-3z+9=0$$

Ahora tenemos que $d(r,s)=d(A,\pi)=\dfrac{|-1+0-3\cdot(-1)+9|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\dfrac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}\,u$



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P=(1,1,-3)$ y $Q=(-1,0,0)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A=(4,3,-5)$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo y el área del mismo.

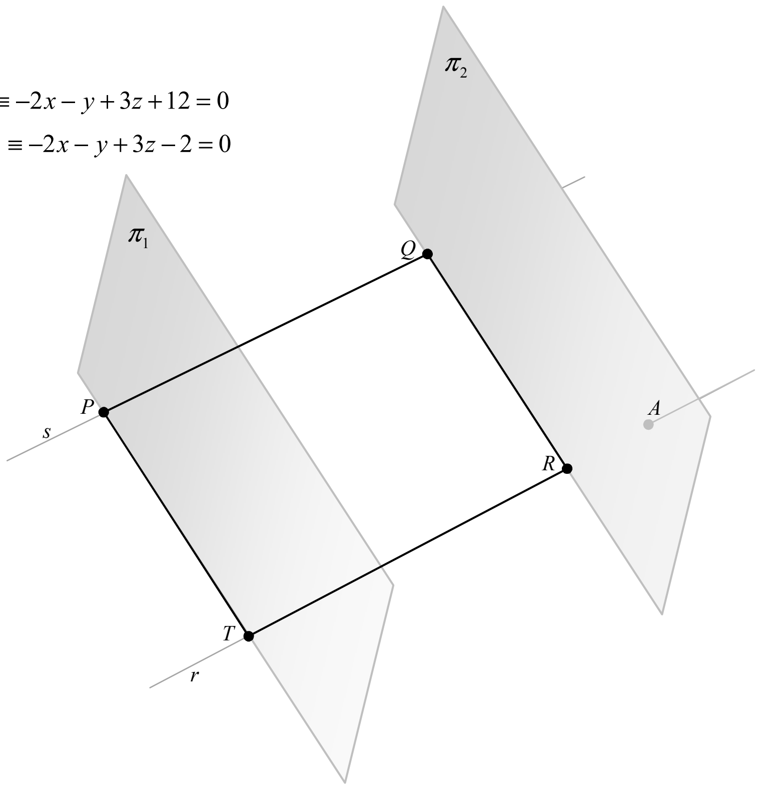
Solución:

Los puntos P y Q están en una misma recta s cuyo vector director es $\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3)$

Los otros dos vértices, R y T, pertenecen a una recta r, paralela a s y que pasa por el punto A.

$$r\equiv\begin{cases}\text{contiene al punto } A(4,3,5)\\ \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3)\end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=4-2\lambda\\ y=3-\lambda\\ z=-5+3\lambda\end{cases}$$

Calculemos ahora dos planos π_1 y π_2 perpendiculares a la recta r y que contengan a los puntos P y Q respectivamente. Entonces tendremos que $T=r\cap\pi_1$ *y* $R=r\cap\pi_2$



El vector normal a π_1 y π_2 es $\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3)$

$P\in\pi_1 \Rightarrow \pi_1\equiv-2(x-1)-1\cdot(y-1)+3\cdot(z+3)=0 \Rightarrow \pi_1\equiv-2x-y+3z+12=0$

$Q\in\pi_2 \Rightarrow \pi_2\equiv-2(x+1)-1\cdot(y-0)+3\cdot(z-0)=0 \Rightarrow \pi_2\equiv-2x-y+3z-2=0$

$T=r\cap\pi_1$, $T\in r \Rightarrow T(4-2\lambda,3-\lambda,-5+3\lambda)$

$T\in\pi_1 \Rightarrow -2(4-2\lambda)-(3-\lambda)+3(-5+3\lambda)+12=0$

$\lambda=1 \Rightarrow T(2,2,-2)$

$R=r\cap\pi_2$, $R\in r \Rightarrow R(4-2\lambda,3-\lambda,-5+3\lambda)$

$R\in\pi_2 \Rightarrow -2(4-2\lambda)-(3-\lambda)+3(-5+3\lambda)-2=0$

$\lambda=2 \Rightarrow R(0,1,1)$

$\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3)$ y $\overrightarrow{PT}=(1,1,1)$

$\text{Área}_{rectángulo}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PT}\right|=\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{42}\ u^2$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

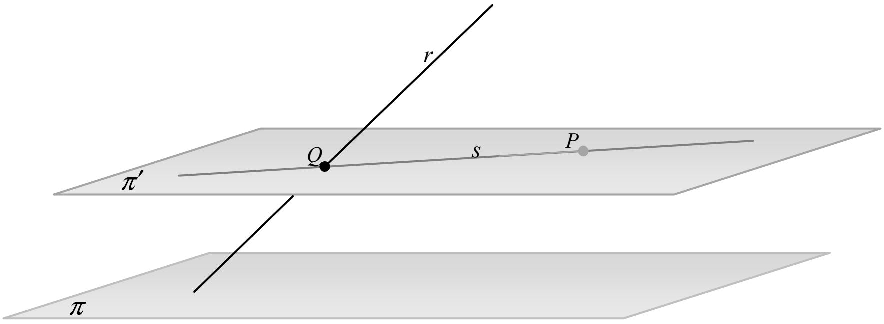
Halla la ecuación de una recta que pase por el punto $(1,-1,2)$, sea paralela al plano $\pi\equiv x-3y+2z=1$ y corte a la recta $r\equiv\begin{cases}x=z-1\\ y=2\end{cases}$.

Solución:

Si la recta pedida tiene que ser paralela al plano π, estará contenida en un plano paralelo a π.

Como r tiene que pasar por el punto P, el plano que contiene a r será $\pi'\equiv\begin{cases}\text{contiene a } P(1,-1,2)\\ \text{su vector normal es } \vec{\eta}=(1,-3,2)\end{cases}$

$\pi'\equiv1\cdot(x-1)-3\cdot(y+1)+2\cdot(z-2)=0 \Rightarrow \pi'\equiv x-3y+2z-8=0$



$r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ *expresada en paramétricas* $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$

El punto Q es la intersección entre la recta r y el plano $\pi' \Rightarrow Q \in r$, *Q es de la forma* $Q(-1+\lambda, 2, \lambda)$

$\pi' \equiv x - 3y + z - 8 = 0$

$Q \in \pi' \Rightarrow$ *verifica la ecuación del plano* : $(-1+\lambda) - 3 \cdot 2 + 2 \cdot \lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$, *entonces* $Q(4,2,5)$

Ahora la recta pedida $s \equiv \begin{cases} \text{pasa por el punto } P(1,-1,2) \\ \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{PQ} = (3,3,3) \text{ o de } \vec{v} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

– *s corta a r en el punto Q*

– *s es paralela a* π *porque está contenida en* π' *que es un plano paralelo a* π. *Además* $\vec{\eta} \cdot \vec{v} = 0$