

Instrucciones: Debes resolver cuatro ejercicios, a elegir entre los cinco propuestos.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

El coeficiente intelectual de los individuos presentes en una sala puede suponerse que sigue una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 9$.

- (1,5 puntos) ¿Cuánto vale μ si sabemos que un 12% de las personas en la sala sobrepasa un coeficiente intelectual de 105?
- (1 punto) Suponiendo que $\mu = 92$, elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su coeficiente intelectual esté entre 89 y 110?

Solución:

$$N(\mu, 9) \xrightarrow{\text{Tipificamos la variable}} N(0, 1)$$

$$P(x > 105) = 0,12 \Rightarrow P(x < 105) = 1 - 0,12 = 0,88 \rightarrow P\left(z < \frac{105 - \mu}{9}\right) = 0,88 \Rightarrow \frac{105 - \mu}{9} = 1,175$$

$$\mu = 105 - 9 \cdot 1,175 \Rightarrow \mu = 94,425$$

$$P(89 < x < 110) = P(x < 110) - P(x < 89)$$

$$N(92, 9) \xrightarrow{\text{Tipificamos la variable}} N(0, 1)$$

$$P(x < 110) \rightarrow P\left(z < \frac{110 - 92}{9}\right) = P(z < 2) = 0,9772$$

$$P(x < 89) \rightarrow P\left(z < \frac{89 - 92}{9}\right) = P\left(z < -\frac{1}{3}\right) = P\left(z > \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(z < \frac{1}{3}\right) = 1 - 0,6306 = 0,3694$$

$$P(89 < x < 110) = 0,9772 - 0,3694 \Rightarrow P(89 < x < 110) = 0,6078$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Se lanzan dos dados y se suman las puntuaciones obtenidas. Si repetimos el experimento 8 veces, se pide:

- (0,5 puntos) La probabilidad de que haya salido exactamente tres veces la puntuación 7.
- (1 punto) La probabilidad de que hayan salido puntuaciones mayores que 6 al menos tres veces.
- (1 punto) En una noche de juegos se han lanzado los dados 150 veces, calcula la probabilidad de que la suma de las puntuaciones haya sido un número primo en, al menos, el 40% de las ocasiones.

Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{sumar } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{sumar mayor que } 6) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$P(\text{sumar primo}) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Se trata de una distribución binomial con $n=8$ y $p=\frac{1}{6}$; $B\left(8, \frac{1}{6}\right)$

$$P[x=3] = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,1042$$

El segundo apartado es una distribución binomial con $n=8$ y $p=\frac{7}{12}$; $B\left(8, \frac{7}{12}\right)$

$$P[x \geq 3] = 1 - P[x < 3] = 1 - (P[x=0] + P[x=1] + P[x=2]) = 1 - 0,061 = 0,939$$

$$P[x=0] + P[x=1] + P[x=2] = \left[\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^8 + \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{7}{12}\right) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^7 + \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^6 \right] = 0,061$$

El tercer apartado es una distribución binomial con $n=150$ y $p=\frac{5}{12}$; $B\left(150, \frac{5}{12}\right)$

40% de 150 = 60 y nos piden $P[x \geq 60]$ que debemos calcular aproximando por una distribución normal de

media $\mu = n \cdot p = 150 \cdot \frac{5}{12} = 62,5$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{150 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12}} \approx 6,04$

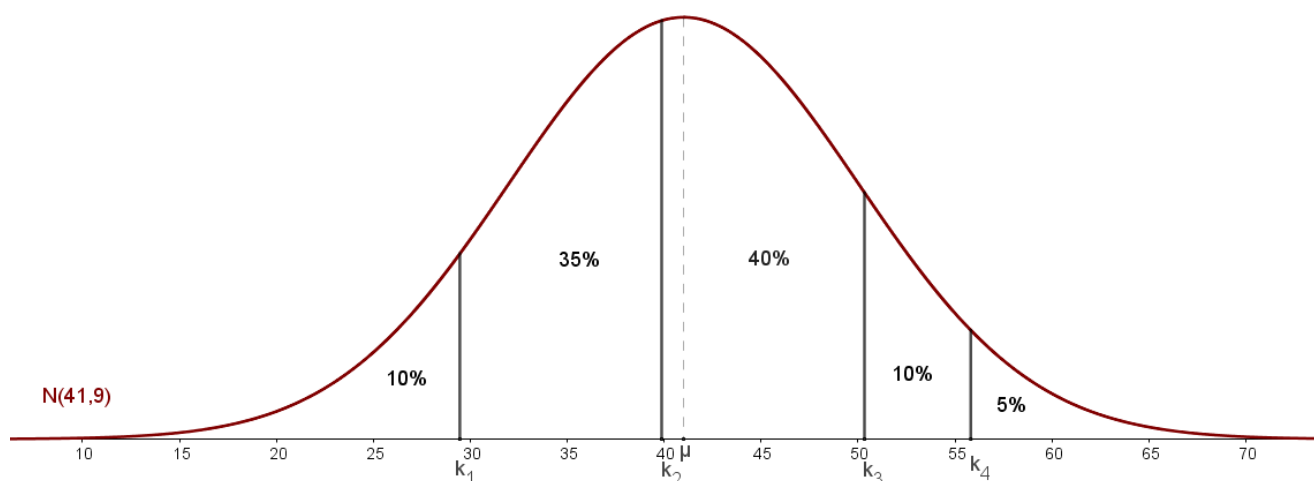
$$B\left(150, \frac{5}{12}\right) \rightarrow N(62,5, 6,04) \rightarrow N(0,1)$$

$$P[x \geq 60] \approx P(x' > 59,5) = P\left(z > \frac{59,5 - 62,5}{6,04}\right) = P(z > -0,4967) = P(z < 0,4967) \approx 0,6903$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Un aparato mide la fuerza que una persona ejerce sobre él y sus resultados se distribuyen según la $N(41, 9)$. Se quiere hacer un baremo por el cual, a cada persona, junto con la puntuación obtenida, se le asigna uno de los siguientes comentarios: “muy flojuchó”, “algo débil”, “normal”, “fuertote” y “sansón”, de modo que haya, respectivamente, en cada uno de los grupos, un 10%, un 35%, un 40%, un 10% y un 5%. ¿En qué puntuaciones hay que poner los límites entre los distintos grupos?

Solución:



Buscamos la puntuación k_4 , a partir de la cual, a una persona se le asigna el comentario de "Sansón":

$$P(x > k_4) = 0,05 \Rightarrow P(x < k_4) = 0,95 \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(z < \frac{k_4 - 41}{9}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{k_4 - 41}{9} = 1,645 \Rightarrow k_4 = 55,81$$

Para obtener el comentario de "fuertote" se debe tener una puntuación entre k_3 y k_4 :

$$P(x > k_3) = 0,15 \Rightarrow P(x < k_3) = 0,85 \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(z < \frac{k_3 - 41}{9}\right) = 0,85 \Rightarrow \frac{k_3 - 41}{9} = 1,037 \Rightarrow k_3 = 50,33$$

Para obtener el comentario de "normal" se debe tener una puntuación entre k_2 y k_3 :

$$P(x < k_2) = 0,45 \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(z < \frac{k_2 - 41}{9}\right) = 0,45 \Rightarrow P\left(z < -\frac{k_2 - 41}{9}\right) = 0,55 \Rightarrow -\frac{k_2 - 41}{9} = 0,1256 \Rightarrow k_2 = 39,87$$

Para obtener el comentario de "algo débil" se debe tener una puntuación entre k_1 y k_2 :

$$P(x < k_1) = 0,1 \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(z < \frac{k_1 - 41}{9}\right) = 0,1 \Rightarrow P\left(z < -\frac{k_1 - 41}{9}\right) = 0,9 \Rightarrow -\frac{k_1 - 41}{9} = 1,2817 \Rightarrow k_1 = 29,46$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,6$ y que, si ocurre A , también ocurre B en un 30% de los casos. Además, sabemos que en un 87% de los casos ocurre alguno de los dos sucesos. Se pide:

- (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que ocurra B y no ocurra A .
- (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que ocurra A o no ocurra B .
- (0,5 puntos) Sabiendo que no ha ocurrido A , qué probabilidad hay de que ocurra B .
- (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que no ocurra alguno de los dos sucesos.
- (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que no haya ocurrido A sabiendo que no ha ocurrido B .

Solución:

Nos dan los datos :

$$P(A) = 0,6 \quad ; \quad P(B/A) = 0,3 \quad ; \quad P(A \cup B) = 0,87$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Como } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18 \\ \text{Ahora } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,87 = 0,6 + P(B) - 0,18 \Rightarrow P(B) = 0,45 \end{array} \right.$$

$$\text{apartado 1.} - P(\bar{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,45 - 0,18 = 0,27$$

$$\text{apartado 2.} - P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0,6 + 0,55 - (0,6 - 0,18) = 0,73$$

$$\text{apartado 3.} - P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,45 - 0,18}{0,4} = 0,675$$

$$\text{apartado 4.} - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,18 = 0,82$$

$$\text{apartado 5.} - P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - 0,87}{0,55} = 0,236$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

En un taller mecánico, el 45% de los clientes tienen un coche de gasolina, el 35% tiene un coche diesel y el 20% un coche híbrido. Una reparación supera los 300 euros en el 30% de los coches de gasolina, en el 40% de los diesel y en el 25% de los híbridos.

- (0,75 puntos) Si elegimos un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que su factura supere los 300 euros?
- (0,75 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que un cliente tenga un híbrido o su factura sea inferior a 300 euros?
- (1 punto) Si un cliente ha pagado menos de 300 euros, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un coche híbrido?

Solución:

Definimos los sucesos :

$$\left. \begin{array}{l} G = \{\text{Coche de gasolina}\} \rightarrow P(G) = 0,45 \\ D = \{\text{Coche diesel}\} \rightarrow P(D) = 0,35 \\ H = \{\text{Coche híbrido}\} \rightarrow P(H) = 0,2 \end{array} \right\} G, D \text{ y } H \text{ son sucesos incompatibles y } G \cup D \cup H = \Omega$$

$$S = \{\text{La factura supera los 300 €}\} \rightarrow P(S/G) = 0,3 ; P(S/D) = 0,4 ; P(S/H) = 0,25$$

$$P(S) = P(G) \cdot P(S/G) + P(D) \cdot P(S/D) + P(H) \cdot P(S/H) = 0,45 \cdot 0,3 + 0,35 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,25 = \mathbf{0,325}$$

$$P(H \cup \bar{S}) = P(H) + P(\bar{S}) - P(H \cap \bar{S}) = P(H) + P(\bar{S}) - P(H) \cdot P(\bar{S}/H) = 0,2 + 0,675 - 0,2 \cdot 0,75 = \mathbf{0,725}$$

$$P(H/\bar{S}) = \frac{P(H \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(H) \cdot P(\bar{S}/H)}{P(\bar{S})} = \frac{0,2 \cdot 0,75}{0,675} = \mathbf{0,22}$$