

BLOQUE DE PROBABILIDAD

Instrucciones: Debes resolver dos ejercicios, a elegir entre los tres propuestos.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un campamento de verano participan jóvenes de tres comunidades autónomas diferentes. El 38% de esos jóvenes provienen de Castilla y León, el 34% de Aragón y el 28% de Navarra. El 20% de los jóvenes castellanoleoneses y aragoneses y el 30% de los navarros son menores de edad.

Entre los participantes en el campamento se elige un joven al azar.

- (0,5 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que no sea menor de edad?
- (0,75 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que sea mayor de edad o no sea navarro?
- (0,75 puntos) Si el joven elegido resulta ser menor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que sea navarro?

Solución:

Tenemos los sucesos: $A = \{\text{Es de Aragón}\}$, $C = \{\text{Es de Castilla y León}\}$, $N = \{\text{Es de Navarra}\}$, $m = \{\text{menor de edad}\}$

Nos dan los datos:

$$P(A) = 0,34; \quad P(C) = 0,38; \quad P(N) = 0,28; \quad P(m/A) = 0,2; \quad P(m/C) = 0,2; \quad P(m/N) = 0,3$$

apartado 1. $P(\bar{m}) = 1 - P(m) = 1 - 0,228 = 0,772$

$$P(m) = P(A) \cdot P(m/A) + P(C) \cdot P(m/C) + P(N) \cdot P(m/N) = 0,38 \cdot 0,2 + 0,34 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,3 = 0,228$$

apartado 2. $P(\bar{m} \cup \bar{N}) = P(\overline{m \cap N}) = 1 - P(m \cap N) = 1 - P(N) \cdot P(m/N) = 1 - 0,28 \cdot 0,3 = 0,916$

apartado 3. $P(N/m) = \frac{P(N \cap m)}{P(m)} = \frac{P(N) \cdot P(m/N)}{P(m)} = \frac{0,28 \cdot 0,3}{0,228} = 0,3684$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una prueba consta de preguntas tipo test con cinco opciones cada pregunta, de las cuales solamente una es correcta. Se contesta a todas las preguntas al azar, calcula:

- (1 punto) La probabilidad de tener más de tres aciertos si la prueba tiene 10 preguntas.
- (1 punto) La probabilidad de no superar los 50 aciertos en una prueba con 200 preguntas.

Solución:

Apartado 1. Es una distribución binomial con $n=10$, $p=0,2$ y $q=0,8 \rightarrow B(10, 0,2)$

$$P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - 0,879 = \mathbf{0,121}$$

$$P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \binom{10}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 + \binom{10}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^7 = 0,879$$

Apartado 2. Aproximamos la binomial $B(200, 0,2)$ por la normal $N(\mu, \sigma)$ con $\begin{cases} \mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,2 = 40 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

$$B(200, 0,2) \xrightarrow{\text{aproximamos}} N(40, 4\sqrt{2}) \xrightarrow{\text{tipificamos}} N(0, 1)$$

$$P(x \leq 50) \simeq P(x' < 50,5) = P\left(z < \frac{50,5 - 40}{4\sqrt{2}}\right) = P(z < 1,856) = \mathbf{0,9683}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{1}{2} ; P(B) = \frac{1}{3} ; P(C) = \frac{1}{4} ; P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3} ; P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} ; P(A/B) = P(C/A) = \frac{1}{2}$$

- (1 punto) Calcula $P(C \cap B)$
- (1 punto) Calcula $P(A/\bar{C})$

Solución:

Nos dan los datos:

$$P(A) = \frac{1}{2} ; P(B) = \frac{1}{3} ; P(C) = \frac{1}{4} ; P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3} ; P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} ; P(A/B) = P(C/A) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tenemos que } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ y } P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ahora } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - P(B \cap C) + \frac{1}{12} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}$$

$$\text{Apartado 1. } P(C \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Apartado 2. } P(A/\bar{C}) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(A) - P(A \cap C)}{1 - P(C)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

BLOQUE DE GEOMETRÍA

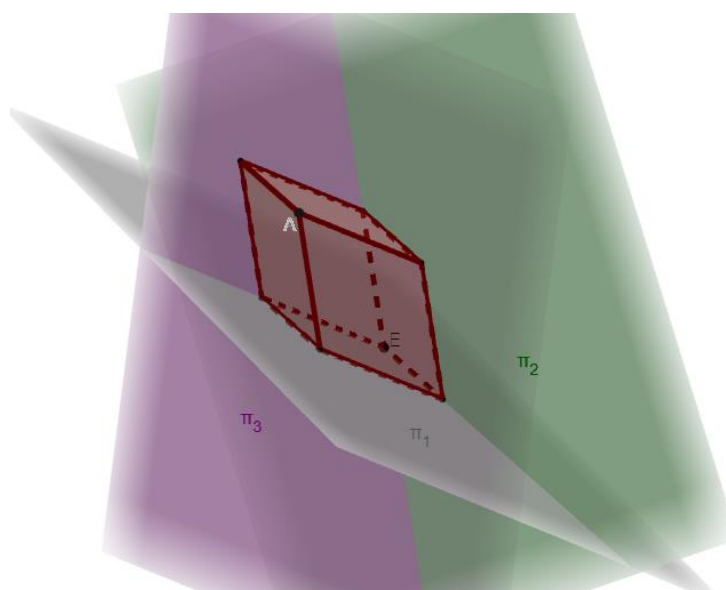
Instrucciones: Debes resolver tres ejercicios, a elegir entre los cuatro propuestos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

De un paralelepípedo conocemos un vértice $A(-3, 1, 2)$ y los planos que contienen a tres de las caras $\pi_1 \equiv x+3y-3z=1$, $\pi_2 \equiv 2x-y+z=2$ y $\pi_3 \equiv 2x+6y+z=9$, se pide:

- (1 punto) Calcula las ecuaciones de los planos que contienen a las tres caras restantes.
- (1 punto) Encuentra el punto donde se cortan las diagonales del paralelepípedo.

Solución:



El punto A no pertenece a ninguno de los planos que nos dan por lo que debe estar en las tres caras pedidas. Los planos que contienen a las caras restantes son paralelos a los dados y contienen al punto A .

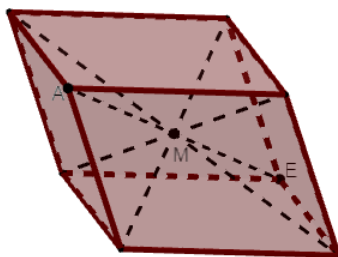
$$\pi_4 \text{ será paralelo a } \pi_1 \text{ y contiene al punto } A \Rightarrow \pi_4 \equiv (x+3)+3(y-1)-3(z-2)=0 \Rightarrow \pi_4 \equiv x+3y-3z+6=0$$

$$\pi_5 \text{ será paralelo a } \pi_2 \text{ y contiene al punto } A \Rightarrow \pi_5 \equiv 2(x+3)-(y-1)+(z-2)=0 \Rightarrow \pi_5 \equiv 2x-y+z+5=0$$

$$\pi_6 \text{ será paralelo a } \pi_3 \text{ y contiene al punto } A \Rightarrow \pi_6 \equiv 2(x+3)+6(y-1)+(z-2)=0 \Rightarrow \pi_6 \equiv 2x+6y+z-2=0$$

El punto E es el corte de los tres planos dados y el vértice opuesto a A , resolvemos el sistema para calcularlo:

$$\begin{cases} x+3y-3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 2x+6y+z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} = \frac{-49}{-49} = 1 ; \quad \begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} = \frac{-49}{-49} = 1 ; \quad \begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} = \frac{-49}{-49} = 1$$



El punto donde se cortan las diagonales del paralelepípedo es el punto medio de $A(-3, 1, 2)$ y $E(1, 1, 1)$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(-3, 1, 2) + \frac{1}{2}(1, 1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(-1, 1, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow M\left(-1, 1, \frac{3}{2}\right)$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el punto de la recta $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$ que se encuentra a distancia mínima de la recta

$$x = y - 3 = \frac{z+1}{-2}.$$

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=z} \begin{cases} 2x + 2z = 3 \\ y = z \end{cases} \rightarrow x = \frac{3-2z}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } r, A\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right) \\ \text{vector de } r, \vec{u} = (-1, 1, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv x = y - 3 = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } s, B(0, 3, -1) \\ \text{vector de } s, \vec{v} = (1, 1, -2) \end{cases}$$

como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales $\Rightarrow r$ y s no son rectas paralelas.

Veamos si las rectas se cortan o se cruzan, para ello comprobamos si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{2}, -3, 1\right) \xrightarrow{\text{igual dirección que}} \vec{w} = (3, -6, 2) \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ están en diferente plano y las dos rectas se cruzan.

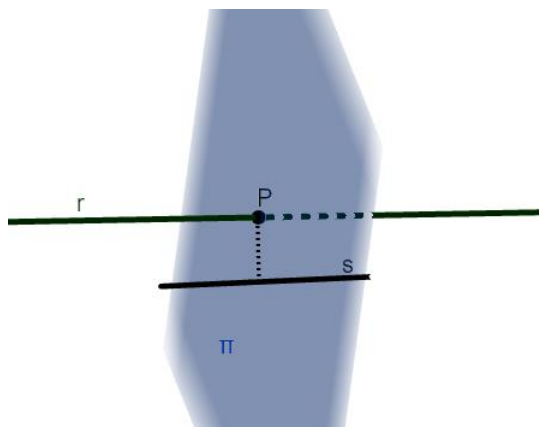
Para encontrar el punto de r más cercano a s , tomamos el plano $\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } s \rightarrow B(0, 3, -1) \\ \vec{v} = (1, 1, -2) \\ \text{tiene la dirección de } \vec{v} \wedge \vec{u}, \text{ perpendicular a } r \text{ y } s \end{cases}$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{u} = (3, 1, 2) \text{ y el plano que buscamos es: } \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - 4y - z + 11 = 0$$

El punto pedido P es la intersección entre r y $\pi \Rightarrow$

$$\begin{cases} P \in r \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}-\lambda, \lambda, \lambda\right) \\ P \in \pi \Rightarrow 2\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)-4\lambda-\lambda+11=0 \Rightarrow \lambda=2 \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}, 2, 2\right)$$



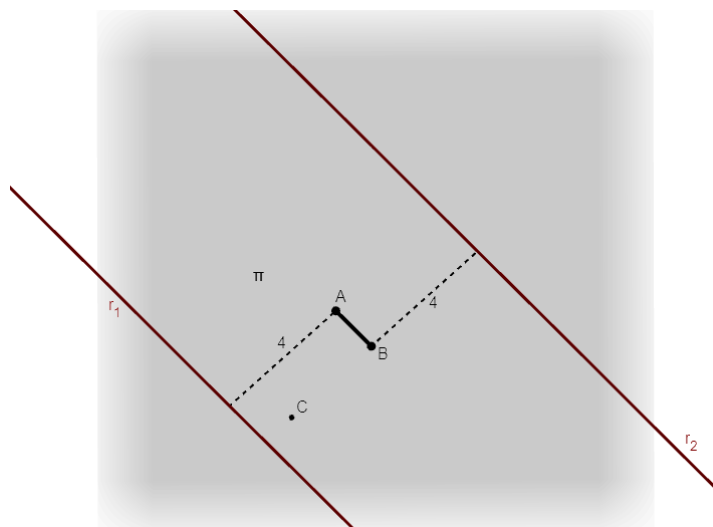
Ejercicio 6. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(0, 2, -2)$, calcula unas ecuaciones de las rectas paralelas al segmento $\overline{AB}$, que estén contenidas en el mismo plano que los puntos A , B y C y que disten de dicho segmento 4 unidades.

Solución:

Las rectas pedidas tienen que estar contenidas en el plano π que definen los puntos A , B y C .

$$\pi \equiv \begin{cases} A(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 4y + z - 6 = 0$$



Esas rectas r_1 y r_2 las vamos a obtener como corte de dos planos π_1 y π_2 , paralelos al segmento $\overline{AB}$ y perpendiculares al plano π , que estén a 4 unidades de distancia del segmento.

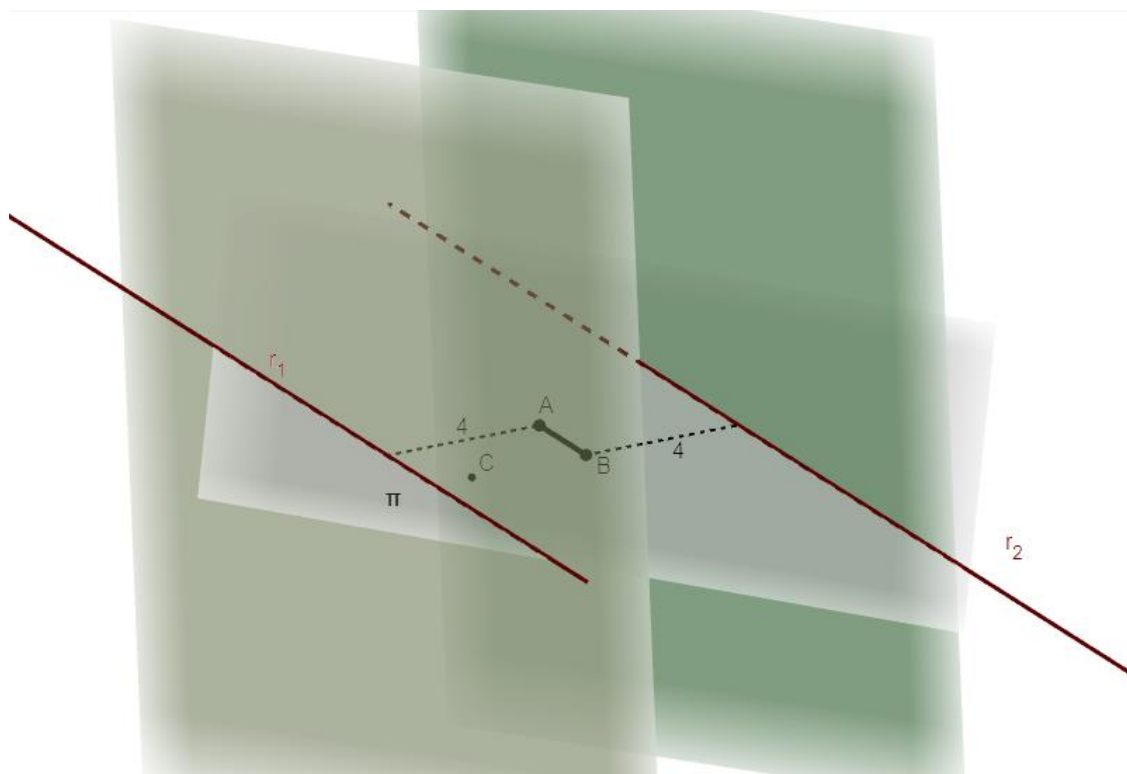
π_1 y π_2 tendrán por vector normal a $\vec{n} \wedge \overline{AB}$, siendo $\vec{n} = (1, 4, 1)$ el vector normal del plano π .

$$\vec{n} \wedge \overline{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \Rightarrow \text{los planos } \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ serán de la forma } 2x - y + 2z + D = 0$$

$$\text{Ahora imponemos que } d(A, \pi_1) = 4 \Rightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 1 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|3 + D|}{3} = 4 \Rightarrow |3 + D| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 3 + D = 12 \rightarrow D = 9 \\ 3 + D = -12 \rightarrow D = -15 \end{cases}$$

Los planos son $\pi_1 \equiv 2x - y + 2z + 9 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 15 = 0$.

$$\text{Las rectas pedidas son: } r_1 \equiv \begin{cases} x + 4y + z - 6 = 0 \\ 2x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases} \text{ y } r_2 \equiv \begin{cases} x + 4y + z - 6 = 0 \\ 2x - y + 2z - 15 = 0 \end{cases}$$



Ejercicio 7. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En el interior de una sala establecemos un sistema de referencia ortonormal en el que las longitudes de los vectores de la base es 1 metro.

Entre dos paredes paralelas, y equidistante de ambas, situamos un tablero que responde a la ecuación $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ y sobre él marcamos los puntos $A(0, 3, 4)$ y $B(3, -3, 1)$.

Se hacen dos agujeros en el tablero de tal forma que dividan al segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales y desde una argolla fijada en el punto $P(4, 1, 0)$ de una de las paredes se pasan dos cuerdas que atraviesan el tablero por los agujeros, en línea recta, hasta otras dos argollas situadas en la pared opuesta, formando un triángulo cuyos vértices están en las tres argollas.

Calcula el área de ese triángulo.

Solución:

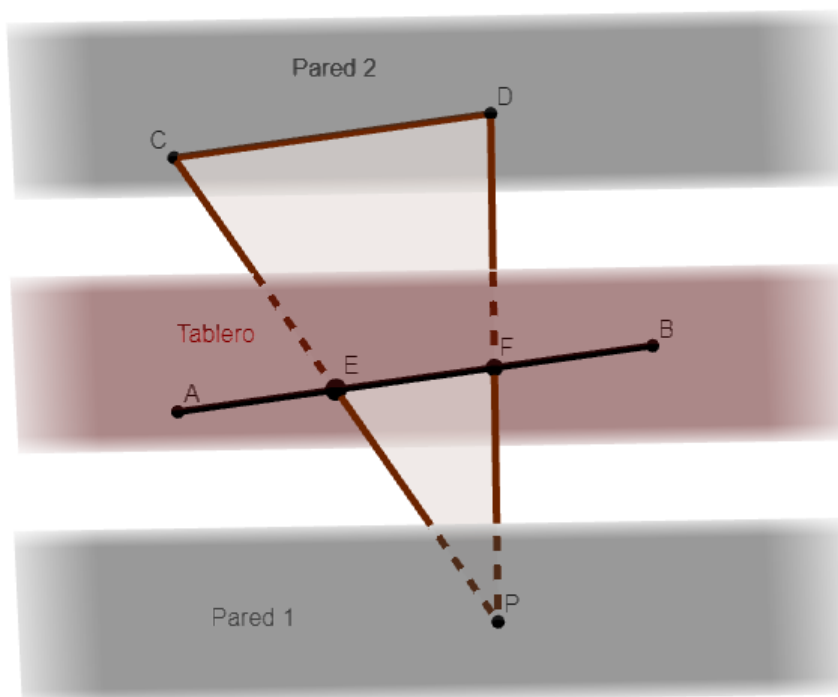
Si dibujamos la situación, observamos que el problema se puede resolver por semejanza al ser el tablero equidistante de las dos paredes y por tanto paralelo a ellas.

Entonces para calcular el área del triángulo sólo necesitamos la distancia del punto P al tablero y la distancia entre los puntos A y B .

$$\overline{AB} = (3, -6, -3) \Rightarrow d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{6} \quad \text{y} \quad d(P, \pi) = \frac{|4+1-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Si los agujeros están en los puntos } E \text{ y } F \Rightarrow d(E, F) = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

Si las argollas están en los puntos P, C y $D \Rightarrow$ el triángulo PCD es semejante al triángulo PEF



$$\text{El área del triángulo } PCD = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{base} = d(C, D) = 2 \cdot d(E, F) = 2\sqrt{6} \\ \text{altura} = d(P, \text{pared } 2) = 2 \cdot d(P, \text{tablero}) = 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Área} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A = 12\sqrt{2} \text{ m}^2$$

También podemos decidir tomar un camino más largo calculando los puntos E y F . Después cortamos las rectas que pasan por P y E y por P y F con el plano que define la pared 2 y ya tendríamos los tres vértices del triángulo.

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OE} = (0, 3, 4) + \frac{1}{3}(3, -6, -3) \Rightarrow \overrightarrow{OE} = (1, 1, 3) \Rightarrow E(1, 1, 3)$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = (0, 3, 4) + \frac{2}{3}(3, -6, -3) \Rightarrow \overrightarrow{OF} = (2, -1, 2) \Rightarrow F(2, -1, 2)$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} P(4, 1, 0) \\ \overrightarrow{PE} = (-3, 0, 3) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} ; \quad r_2 \equiv \begin{cases} P(4, 1, 0) \\ \overrightarrow{PF} = (-2, -2, 2) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La pared 2 es un plano paralelo al tablero $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ que está a distancia $2\sqrt{3}$ del punto A

$$\pi' \equiv x + y - z + D = 0, \quad d(A, \pi') = \frac{|0 + 3 - 4 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow |D - 1| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D - 1 = 6 \Rightarrow D = 7 \\ D - 1 = -6 \Rightarrow D = -5 \end{cases}$$

$\pi'' \equiv x + y - z - 5 = 0$ es la pared 1 porque $P \in \pi''$ y $\pi' \equiv x + y - z + 7 = 0$ es la pared 2.

$$C = r_1 \cap \pi' \Rightarrow \begin{cases} C \in r_1 \Rightarrow C(4 - \lambda, 1, \lambda) \\ C \in \pi' \Rightarrow 4 - \lambda + 1 - \lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 6 \end{cases} \Rightarrow C(-2, 1, 6)$$

$$D = r_2 \cap \pi' \Rightarrow \begin{cases} D \in r_2 \Rightarrow D(4 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda) \\ D \in \pi' \Rightarrow 4 - \lambda + 1 - \lambda - \lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow D(0, -3, 4)$$

$$\text{Ahora podemos calcular el área como } A = \frac{|\overrightarrow{CD}| \cdot d(P, \pi')}{2} \text{ o } A = \frac{|\overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PD}|}{2}$$

$$\overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -6 & 0 & 6 \\ -4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 24\vec{e}_1 + 24\vec{e}_3 \Rightarrow A = \frac{|\overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PD}|}{2} = \frac{\sqrt{24^2 + 24^2}}{2} = \frac{24\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ m}^2$$

También se puede calcular C considerando al punto E como el punto medio de P y C . De igual forma se calcula D .