

Instrucciones: Debes resolver cuatro ejercicios, a elegir entre los cinco propuestos.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$, $s \equiv x-3 = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{2}$ y el punto $P(1, 5, 2)$, se pide:

- (1,25 puntos) Calcula la distancia entre ambas rectas.
- (1,25 puntos) Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta a las rectas r y s .

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases} \xrightarrow[2 \cdot 1^\circ + 2^\circ]{1^\circ + 2^\circ} \begin{cases} 3x+z=1 \\ 4x+y=2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-4\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } r, A(0, 2, 1) \\ \text{vector de } r, \vec{u}=(1, -4, -3) \end{cases}$$

$$s \equiv x-3 = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } s, B(3, 4, 2) \\ \text{vector de } s, \vec{v}=(1, -1, 2) \end{cases}$$

como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales $\Rightarrow r$ y s no son rectas paralelas.

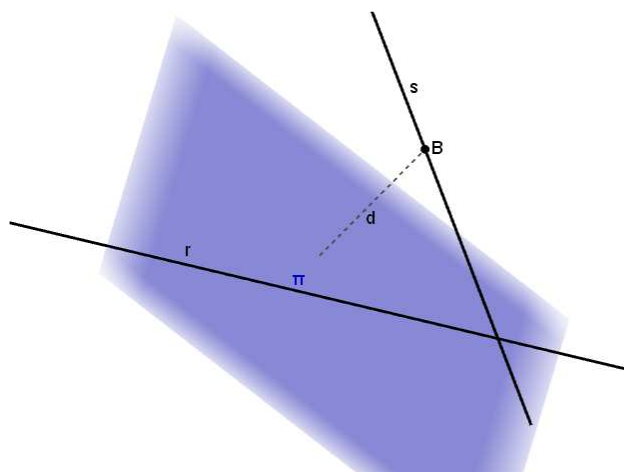
Para calcular la distancia entre r y s , hallamos la ecuación de un plano π que contenga a una de las dos rectas (p. ej. a r) y sea paralelo a la otra (s). Si la distancia es cero, las rectas se cortan. En caso contrario, se cruzan.

$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } r \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } A(0, 2, 1) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u}=(1, -4, -3) \end{cases} \\ \text{es paralelo a la recta } s \Rightarrow \text{tiene la dirección del vector } \vec{v}=(1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv 11x + 5y - 3z - 7 = 0$$

Ahora la distancia entre las dos rectas será igual a la distancia entre un punto de $B \in s$ y el plano π

$$d(s, r) = d(B, \pi) = \frac{|11 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{11^2 + 5^2 + (-3)^2}} = \frac{40}{\sqrt{155}} u$$



Debemos encontrar una recta que pase por el punto $P(1, 5, 2)$ y que corte a las rectas r y s . Para ello vamos a calcular dos planos, π_1 que contenga al punto P y a la recta r , y π_2 que contenga al punto P y a la recta s .

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } r \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } A(0, 2, 1) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u} = (1, -4, -3) \end{cases} \\ \text{Tiene la dirección del vector } \overrightarrow{AP} = (1, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

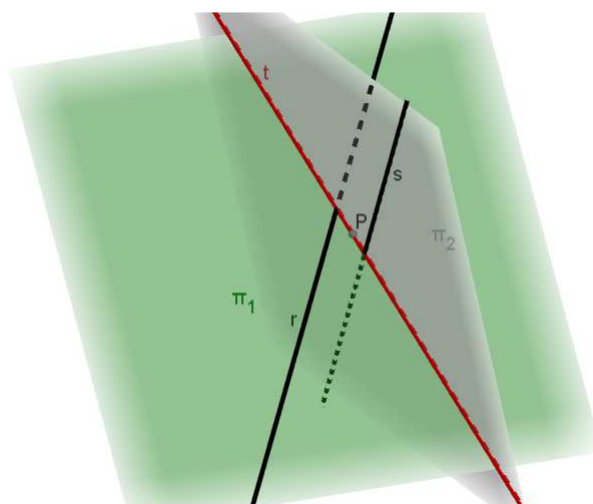
$$\pi_1 \equiv 5x - 4y + 7z + 1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } s \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } B(3, 4, 2) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{v} = (1, -1, 2) \end{cases} \\ \text{Tiene la dirección del vector } \overrightarrow{BP} = (-2, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_2 \equiv 3x + 4y + z - 24 = 0$$

Ahora la recta pedida será la intersección de los dos planos: $t \equiv \begin{cases} 5x - 4y + 7z + 1 = 0 \\ 3x + 4y + z - 24 = 0 \end{cases}$

- P es un punto de t porque está en la intersección de los dos planos.
- t corta a r y a s porque comparte plano con ellas y no es paralela a ninguna.



Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean la recta $r \equiv x-2=y-1=z-2$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+z=3$.

- (1 punto) Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .
- (1,5 puntos) Encuentra el punto simétrico de $P(1, 1, -3)$ respecto de la recta r .

Solución:

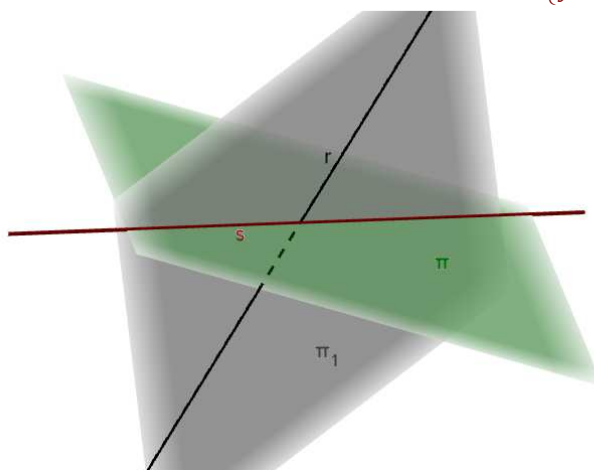
$$r \equiv x-2=y-1=z-2 \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } r: A(2, 1, 2) \\ \text{vector de } r: \vec{v}=(1, 1, 1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x+y+z=3 \Rightarrow \text{vector normal a } \pi: \vec{n}=(2, 1, 1)$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π direcciones diferentes:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} \text{punto } A(2, 1, 2) \\ \text{vector } \vec{v}=(1, 1, 1) \\ \text{vector } \vec{n}=(2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv y-z+1=0$$

$$\text{Ahora, la proyección ortogonal de } r \text{ sobre } \pi \text{ será la recta } s = \pi \cap \pi_1 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

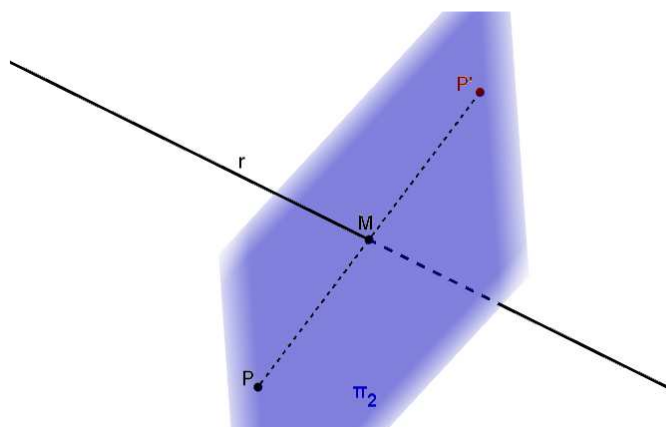


Para encontrar el punto simétrico de $P(1, 1, -3)$ con respecto a la recta $r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ calcularemos la ecuación de un plano π_2 perpendicular a r . El punto de intersección entre r y π_2 será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} \text{vector normal } \vec{v}=(1, 1, 1) \\ \text{punto } P(1, 1, -3) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z+3) = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+y+z+1=0$$

$$M = r \cap \pi_2 \Rightarrow \begin{cases} M \in r \rightarrow M(2+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda) \\ M \in \pi_2 \rightarrow (2+\lambda) + (1+\lambda) + (2+\lambda) + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow M(0, -1, 0) \end{cases}$$

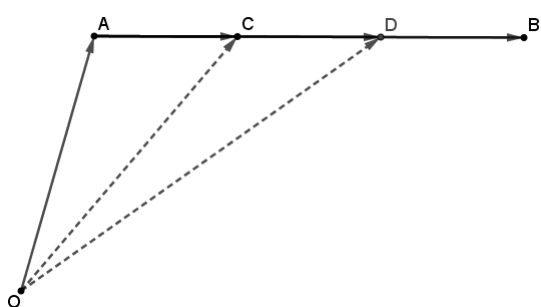
$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OP'}) \Rightarrow \overline{OP'} = 2\overline{OM} - \overline{OP} \Rightarrow \overline{OP'} = 2(0, -1, 0) - (1, 1, -3) \Rightarrow \overline{OP'} = (-1, -3, 3) \Rightarrow P'(-1, -3, 3)$$

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Los haces de luz de dos punteros láser situados en el punto $P(2, 1, -1)$ pasan, respectivamente, por los dos puntos intermedios que dividen en tres partes iguales al segmento de extremos $A(2, -3, 1)$ y $B(5, 3, 4)$.

- (1,5 puntos) Determina la distancia entre las marcas que producen los dos haces de luz cuando inciden sobre el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z = 25$.
- (1 punto) Halla la ecuación de los planos perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ y que distan del punto P $3\sqrt{6}$ unidades.

Solución:



Debemos calcular las coordenadas de los dos puntos intermedios C y D:

Las coordenadas del punto C serán las mismas que las de su vector de posición $\overline{OC}$. $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AB} \Rightarrow$

$$\overline{OC} = (2, -3, 1) + \frac{1}{3}(3, 6, 3) \Rightarrow \overline{OC} = (3, -1, 2) \Rightarrow C(3, -1, 2)$$

Del mismo modo, $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AB}$

$$\overline{OD} = (2, -3, 1) + \frac{2}{3}(3, 6, 3) \Rightarrow \overline{OD} = (4, 1, 3) \Rightarrow D(4, 1, 3)$$

Denotamos por r_1 y r_2 a las rectas que determinan las trayectorias de los haces de luz de los dos punteros.

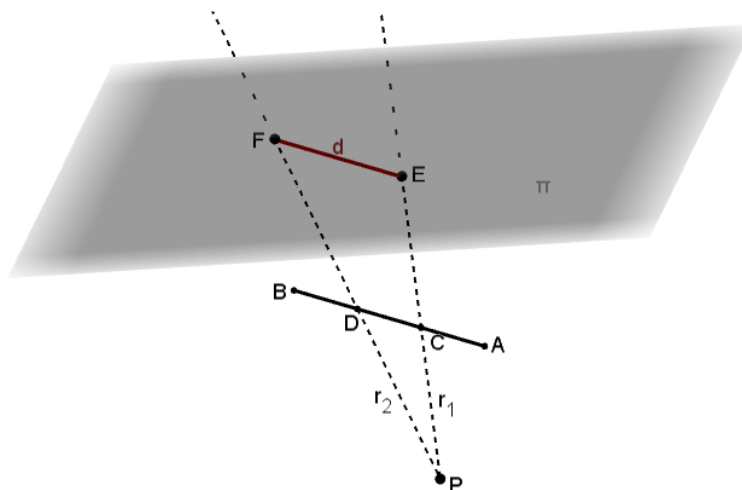
$$r_1 \equiv \begin{cases} \text{punto } P(2, 1, -1) \\ \text{vector } \overline{CP} = (-1, 2, -3) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} ; \quad r_2 \equiv \begin{cases} \text{punto } P(2, 1, -1) \\ \text{vector } \overline{DP} = (-2, 0, -4) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Denotamos por E y F a los puntos que determinan las rectas cuando inciden sobre el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z = 25$.

$$E = r_1 \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} E \in r_1 \rightarrow E(2-\lambda, 1+2\lambda, -1-3\lambda) \\ E \in \pi \rightarrow (2-\lambda) - 2(1+2\lambda) + 3(-1-3\lambda) = 25 \rightarrow \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow E(4, -3, 5)$$

$$F = r_2 \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} F \in r_2 \rightarrow F(2+\lambda, 1, -1+2\lambda) \\ F \in \pi \rightarrow (2+\lambda) - 2 \cdot 1 + 3(-1+2\lambda) = 25 \rightarrow \lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow F(6, 1, 7)$$

$$d(E, F) = |\overline{EF}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6} u$$

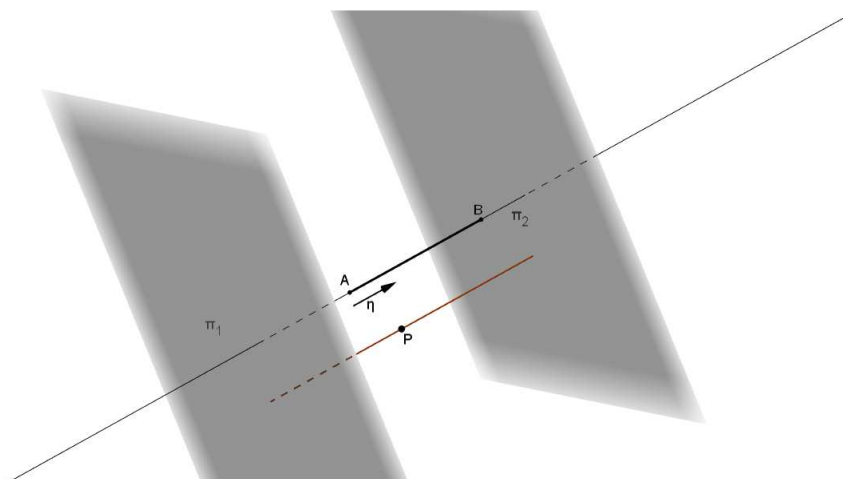


Los planos perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ tienen como vector normal $\vec{\eta}$, proporcional al vector $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (3, 6, 3) \Rightarrow \vec{\eta} = (1, 2, 1) \text{ y los planos son de la forma } \pi_n \equiv x + 2y + z + D = 0$$

$$d(P, \pi_n) = \frac{|2 + 2 \cdot 1 + (-1) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = 3\sqrt{6} \Rightarrow \frac{|3 + D|}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6} \Rightarrow |3 + D| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 3 + D = 18 \rightarrow D = 15 \\ 3 + D = -18 \rightarrow D = -21 \end{cases}$$

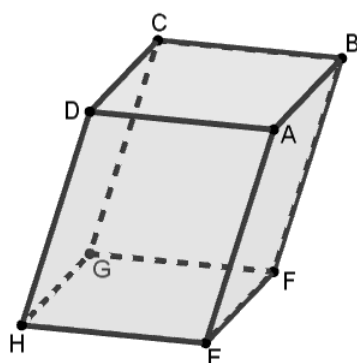
$$\pi_1 \equiv x + 2y + z + 15 = 0 ; \pi_2 \equiv x + 2y + z - 21 = 0$$



Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Del paralelepípedo $ABCDEFGH$, conocemos los vértices $A(1, 1, 1)$, $B(0, 3, 1)$, $D(0, -2, 2)$ y $E(2, -1, -2)$. Se pide:

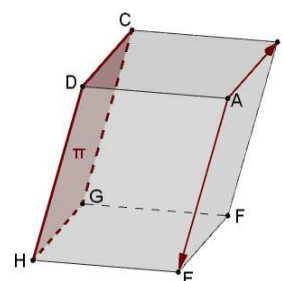
- (0,75 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene a la cara $CDGH$.
- (0,5 puntos) Calcula las coordenadas del vértice H .
- (0,5 puntos) Determina el volumen del paralelepípedo $ABCDEFGH$.
- (0,75 puntos) En el sistema de referencia $R = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$, encuentra las coordenadas del punto medio de la arista $\overline{FG}$.

Solución:

Llamamos π al plano que contiene a la cara $CDGH$

$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene al punto } D(0, -2, 2) \\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0) \\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} = (1, -2, -3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + 2 = 0$$

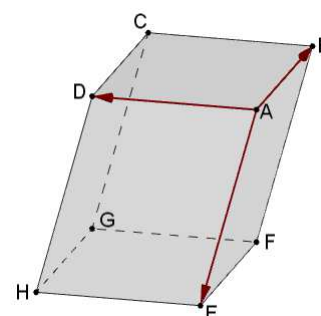


$$H(a, b, c); \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow (a, b+2, c-2) = (1, -2, -3) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+2=-2 \rightarrow b=-4 \\ c-2=-3 \rightarrow c=-1 \end{cases} \Rightarrow H(1, -4, -1)$$

$$A(1, 1, 1), B(0, 3, 1), D(0, -2, 2), E(2, -1, -2)$$

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, -3, 1)$, $\overrightarrow{AE} = (1, -2, -3)$, y el volumen del paralelepípedo será:

$$V = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] \right| = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = |-15| = 15u^3$$



Para encontrar las coordenadas del punto medio de la arista $\overline{FG}$, que llamamos M , debemos conseguir las coordenadas del vector $\overline{AM}$ en el sistema de referencia R , es decir, hay que poner el vector $\overline{AM}$ como combinación lineal de los vectores $\{\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE}\}$ que forman la base del sistema de referencia con origen en el punto A .

Primero buscamos el vector que une el punto A con el punto F . Ese vector se obtiene como $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{AE}$

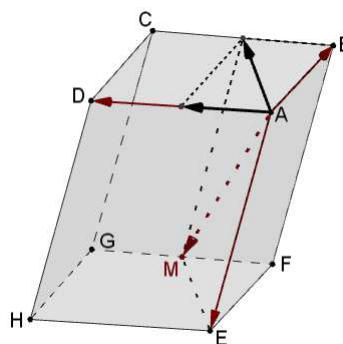
El vector que une el punto A con el punto G se obtiene como $\overline{AG} = \overline{AC} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}$

M es el punto medio entre F y G , entonces $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AF} + \overline{AG}) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}) = \frac{1}{2}(2\overline{AB} + \overline{AD} + 2\overline{AE})$

por tanto: $\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AE} \Rightarrow \overline{AM} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ en la base $\{\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE}\} \Rightarrow$

$M\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ en el sistema de referencia R .

También se ve directamente que $\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AE}$



Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $A(0, -1, -1)$ y $B(2, 0, -1)$.

- (1 punto) Halla la ecuación del plano que contiene al segmento $\overline{AB}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - 3z + 1 = 0$.
- (1,5 puntos) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv x = -2y = -2z$ que determinan con A y B un triángulo de área 1.

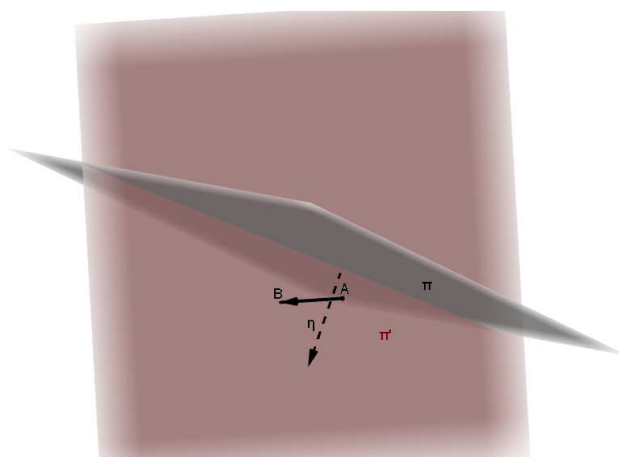
Solución:

El plano que nos piden, π' , contiene al segmento $\overline{AB}$, por tanto tiene la dirección del vector $\overline{AB} = (2, 1, 0)$.

Como el plano π' debe ser perpendicular al plano π , π' tiene la dirección del vector normal al plano π , $\vec{n} = (1, 1, -3)$.

El plano π' tiene que pasar por los puntos $A(0, -1, -1)$ y $B(2, 0, -1) \Rightarrow$ ya tenemos los elementos necesarios para calcular su ecuación:

$$\pi' \equiv \begin{cases} A(0, -1, -1) \\ \overline{AB} = (2, 1, 0) \\ \vec{n} = (1, 1, -3) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv -3x + 6y + z + 7 = 0$$



Ahora tenemos que buscar los puntos de la recta r que determinan con A y B un triángulo de área 1.

$$r \equiv x = -2y = -2z \xrightarrow{\text{dividiendo por } -2} r \equiv \frac{x}{-2} = y = z, \text{ pasando a las ecuaciones paramétricas } \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Todos los puntos de la recta r son de la forma $C(-2\lambda, \lambda, \lambda)$. El área del triángulo que determinan con A, B y C es

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|}{2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2\lambda, \lambda+1, \lambda+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2\lambda & \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\vec{e}_1 - (2\lambda+2)\vec{e}_2 + (4\lambda+2)\vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (\lambda+1, -2\lambda-2, 4\lambda+2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(\lambda+1)^2 + (-2\lambda-2)^2 + (4\lambda+2)^2} = \sqrt{21\lambda^2 + 26\lambda + 9}$$

$$\frac{\sqrt{21\lambda^2 + 26\lambda + 9}}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{21\lambda^2 + 26\lambda + 9} = 2 \Rightarrow 21\lambda^2 + 26\lambda + 9 = 4 \Rightarrow 21\lambda^2 + 26\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -\frac{5}{21} \end{cases}$$

$$\text{Como } C(-2\lambda, \lambda, \lambda), \text{ los puntos son } \begin{cases} \text{para } \lambda = -1 & C_1(2, -1, -1) \\ \text{para } \lambda = -\frac{5}{21} & C_2\left(\frac{10}{21}, -\frac{5}{21}, -\frac{5}{21}\right) \end{cases}$$

