Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = e^{1-x^2}$ en los puntos de intersección con la recta $y=1$.

Calculemos los cortes entre la recta y la curva:

$$\begin{cases} y=1 \\ y=e^{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow 1=e^{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} ;\ \textit{entonces los puntos son } p_1=(1,1)\ y\ p_2=(-1,1)$$

las pendientes de las rectas tangentes a la curva en esos puntos serán:

$$\begin{cases} m_1=f'(1) \\ m_2=f'(-1) \end{cases} ,\ f(x)=e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x)=-2x\cdot e^{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} m_1=f'(1)=-2 \\ m_2=f'(-1)=2 \end{cases}$$

La ecuación de una recta en forma punto pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$*, entonces las rectas pedidas son*

$$\begin{cases} r_1\equiv\ y-1=-2(x-1) \Rightarrow r_1\equiv\ y+2x-3=0 \\ r_2\equiv\ y-1=2(x+1) \Rightarrow r_2\equiv\ y-2x-3=0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los límites siguientes:

$$\downarrow \textit{ indeterminación } 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^3\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-3}} \triangleq (L'H\hat{o}pital)=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-3x^{-4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^{-2}} \triangleq \lim_{x\to0^+}\frac{-x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-6x^{-3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{6x^{-1}} \triangleq$$

$$\triangleq \lim_{x\to0^+}\frac{-x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-6x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{6}=+\infty \qquad \left(nota:\ \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0\right)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}=A \Rightarrow \ln A=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}\right]=\lim_{x\to0}\left[tg\,x\cdot\left(\ln 1-\ln x^2\right)\right]=\lim_{x\to0}\frac{-2\ln x}{cotg\,x} \triangleq$$

$$\triangleq (L'H\hat{o}pital)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{sen^2x}}=\lim_{x\to0}\frac{2sen^2x}{x} \triangleq \lim_{x\to0}\frac{4sen\,x\cdot cos\,x}{1}=0 \Rightarrow \ln A=0 \Rightarrow A=1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x\cdot(1-sen\,x)}{cos^2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x\cdot(1-sen\,x)}{1-sen^2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x\cdot(1-sen\,x)}{(1+sen\,x)(1-sen\,x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x}{1+sen\,x}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula m, n y b para que la función definida de la forma: $f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+5 & si \quad x<1 \\ 3x+1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2, b], y determina el valor intermedio garantizado por el teorema.

$$f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+5 & si \;\; x<1 \\ 3x+1 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$$

Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle, $f(x)$ *debe ser continua en* $[-2,b]$, *derivable en* $(-2,b)$ *y* $f(-2)=f(b)$

$f(x)$, *por ser polinómica, es siempre continua salvo en* $x=1$. *Imponemos que* $f(x)$ *sea continua en* $x=1 \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

$$f(1)=4 \;,\; \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x+1)=4 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(mx^2+nx+5)=m+n+5 \end{cases} \Rightarrow m+n+5=4 \Rightarrow m+n+1=0$$

$f(x)$, *por ser polinómica, es siempre derivable salvo en* $x=1$. *Imponemos que* $f(x)$ *sea derivable en* $x=1 \Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1)$

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)+1-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0^+}3=3$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{m(1+h)^2+n(1+h)+5-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{mh^2+2mh+nh+m+n+1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{mh^2+2mh+nh}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{h}(mh+2m+n)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0^-}(mh+2m+n)=2m+n$$

entonces $2m+n=3 \Rightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ 2m+n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=-5 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 4x^2-5x+5 & si \;\; x<1 \\ 3x+1 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$

Ahora debe cumplirse $f(-2)=f(b) \Rightarrow f(-2)=31$ *y* $f(b)=\begin{cases} 4b^2-5b+5 & si \;\; -2<b<1 \\ 3b+1 & si \;\; b\geq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4b^2-5b+5=31 \Rightarrow 4b^2-5b-26=0 \Rightarrow \cancel{b=-2} \;\; o \;\; \cancel{b=\frac{13}{4}} \\ 3b+1=31 \Rightarrow b=10 \end{cases}$$

Busquemos entonces $x_0\in(-2,10) \;/\; f'(x_0)=0$

$$f'(x)=\begin{cases} 8x-5 & si \;\; x<1 \\ 3 & si \;\; x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 8x-5=0 \Rightarrow x_0=\frac{5}{8} \text{ que está en } (-2,10)$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera la ecuación $x^3+\lambda x^2-2x=1$.

a) Probar que si $\lambda>2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.

b) Probar que si $\lambda<2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

$x^3+\lambda x^2-2x=1 \Rightarrow x^3+\lambda x^2-2x-1=0$; *sea la función* $f(x)=x^3+\lambda x^2-2x-1$, $f(x)$ *es una función siempre continua, por ser polinómica y los puntos* x_0 *tales que* $f(x_0)=0$ *son raíces de la ecuación.*

a) *Para* $\lambda > 2$, $f(x)$ *es continua en* $[0,1]$, *con* $f(0) = -1 < 0$ *y* $f(1) = \lambda - 2 > 0$, *entonces, por el teorema de Bolzano*, $\exists x_0 \in (0,1)$ *tal que* $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ *la ecuación admite alguna solución menor que* 1.

b) *Para* $0 \le \lambda < 2$, $f(x)$ *es continua en* $[1,2]$, *con* $f(1) = \lambda - 2 < 0$ *y* $f(2) = 4\lambda + 3 > 0$, *entonces, por el teorema de Bolzano*, $\exists x_0 \in (1,2)$ *tal que* $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ *la ecuación admite alguna solución mayor que* 1.

Para $\lambda < 0$, $f(x)$ *es continua en* $[1, 2-\lambda]$, *con* $f(1) = \lambda - 2 < 0$ *y* $f(2-\lambda) = (2-\lambda)^3 + \lambda(2-\lambda)^2 - 2(2-\lambda) - 1$

$f(2-\lambda) = 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3 - 4 + 2\lambda - 1 = 2\lambda^2 - 6\lambda + 3 > 0 \Rightarrow$ *por el teorema de Bolzano*,

$\exists x_0 \in (1, 2-\lambda)$ *tal que* $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ *la ecuación admite alguna solución mayor que* 1.

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea α un número real fijo. Probar que existe un único número real $\beta > 0$, que es solución de la ecuación $x + \ln x = \alpha$.

α *es un número real fijo. La ecuación* $x + \ln x = \alpha$ *sólo puede tener soluciones positivas, puesto que* $\ln x$ *no está definido para* $x \le 0$.

Sea la función $f(x) = x + \ln x - \alpha$, *supongamos que existen* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *con* $0 < x_1 < x_2$, *tales que* $f(x_1) = f(x_2) = 0$
x_1 *y* x_2 *serán entonces soluciones de la ecuación* $x + \ln x = \alpha$.

$f(x)$ *es continua en* $[x_1, x_2]$ *y derivable en* (x_1, x_2) *y además* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ *por el teorema de Rolle* $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -1$, *por tanto* $c = -1 \Rightarrow$ *contradicción puesto que* $0 < x_1 < c < x_2 \Rightarrow$ *la ecuación no puede tener dos soluciones reales.*

Veamos que la ecuación tiene una solución $\beta > 0$

Si $\alpha = 1 \Rightarrow x + \ln x = 1 \Rightarrow \beta = 1$ *es solución de la ecuación.*

Si $\alpha > 1 \Rightarrow$ *la función* $f(x) = x + \ln x - \alpha$ *es continua en* $[1, \alpha]$, $f(1) = 1 - \alpha < 0$ *y* $f(\alpha) = \ln \alpha > 0 \Rightarrow$ *por el teorema de Bolzano* $\exists\, \beta \in (1, \alpha)$ $(1 < \beta < \alpha)$ *tal que* $f(\beta) = 0 \Rightarrow \exists\, \beta > 0$ *que es solución de la ecuación.*

Si $\alpha < 1 \Rightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \exists\, \varepsilon > 0$ *tal que* $\varepsilon + \ln \varepsilon - \alpha < 0$, *ya que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
entonces $f(x) = x + \ln x - \alpha$ *es continua en* $[\varepsilon, 1]$, $f(\varepsilon) = \varepsilon + \ln \varepsilon - \alpha < 0$ *y* $f(1) = 1 - \alpha > 0 \Rightarrow$ *por el teorema de Bolzano* $\exists\, \beta \in (\varepsilon, 1)$ $(0 < \varepsilon < \beta < 1)$ *tal que* $f(\beta) = 0 \Rightarrow \exists\, \beta > 0$ *que es solución de la ecuación.*

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Supóngase que f es continua para todo número real x, excepto para $x=6$. Si $g(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ ¿para qué valores de x puede asegurarse la continuidad de la función $f\circ g$?

$f(x)$ es una función continua para todo número real x, salvo para $x=6$.

$g(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ *es continua* $\forall\ x\in(-\infty\,,2)\cup(2\,,+\infty)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ *es continua en* $x=x_0 \Leftrightarrow g(x)$ *es continua en* $x=x_0$ *y* $f(x)$ *es continua en* $x=g(x_0)$

Por tanto la función $(f\circ g)(x)$ *no es continua en* $x=2$.

Veamos cuando $g(x)=6 \Rightarrow \dfrac{3x}{x-2}=6 \Rightarrow x=4$, *entonces* $f(x)$ *no es continua en* $x=g(4)$ *y la función* $(f\circ g)(x)$ *no es continua en* $x=4$. *Tenemos entonces que* $(f\circ g)(x)$ *es continua* $\forall x\in(-\infty\,,2)\cup(2,4)\cup(4\,,+\infty)$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Estúdiese la derivabilidad de la función $f(x)=x+|1-\ln x|$ y hállese la ecuación de la recta tangente a la función en el punto x=2.

Dom $f(x)=(0,+\infty)$

$$f(x)=x+|1-\ln x| \quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases} x+1-\ln x & si\ \ o<x<e \\ x-1+\ln x & si\ \ x\ge e\end{cases}$$

$f(x)$ es suma de funciones derivables $\Rightarrow$ $f(x)$ es derivable en todos los puntos de su dominio, salvo quizás en el punto $x=e$.

Veamos si $f(x)$ es derivable en $x=e$, para ello debe cumplirse que $f'_-(e)=f'_+(e)$

$$f'_-(e)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{(e+h)+1-\ln(e+h)-e}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{h+1-\ln(e+h)}{h}\triangleq(L'Hôpital)=\lim_{h\to0^-}\frac{1-\frac{1}{e+h}}{1}=1-\frac{1}{e}$$

$$f'_+(e)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{(e+h)-1+\ln(e+h)-e}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h-1+\ln(e+h)}{h}\triangleq(L'Hôpital)=\lim_{h\to0^+}\frac{1+\frac{1}{e+h}}{1}=1+\frac{1}{e}$$

$1-\dfrac{1}{e}\neq1+\dfrac{1}{e} \Rightarrow f'_-(e)\neq f'_+(e) \Rightarrow f(x)$ *no es derivable en* $x=e$ $\quad$ (*observar que* $f(x)$ *si es continua en* $x=e$)

Calculemos ahora la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$.

Como $2<e \Rightarrow f(2)=2+1-\ln2 \Rightarrow f(2)=3-\ln2$. *Para* $x<e$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{2}$

Entonces la recta pedida es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow y-(3-\ln2)=\dfrac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y=\dfrac{x}{2}+2-\ln2$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea f una función continua y derivable tal que $f(0)=3$. Calcular cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en el intervalo $[0,5]$ existe un c tal que $f'(c)=8$.

f es una función continua y derivable $\Rightarrow$ f será continua en $[0,5]$ y derivable en $(0,5)$ $\Rightarrow$ por el teorema del valor medio de Lagrange, $\exists\, c\in(0,5)$ *tal que* $f'(c)=\dfrac{f(5)-f(0)}{5-0} \Rightarrow 8=\dfrac{f(5)-3}{5} \Rightarrow f(5)=43$