(Álgebra lineal. 3ª ev.)

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir el sistema $\begin{cases} mx+3y+z=1 \\ x+my+3z=1 \\ x+y+mz=3 \\ 3x+y+z=m \end{cases}$ según los valores del parámetro, y resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

Como es un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas comenzamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} m & 3 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} m & 3 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}_{F_1=F_1+F_2+F_3+F_4} = \begin{vmatrix} m+5 & m+5 & m+5 & m+5 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}_{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1 \\ C_4=C_4-C_1}} =$$

$$=(m+5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & m-3 \end{vmatrix} = (m+5)\begin{vmatrix} m-1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-3 \end{vmatrix}_{F_1=F_1+F_3} = (m+5)\begin{vmatrix} m-3 & 0 & m-3 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-3 \end{vmatrix}_{C_3=C_3-C_1} = (m+5)\begin{vmatrix} m-3 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-1 \end{vmatrix} =$$

$$=(m+5)(m-3)\begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ -2 & m-1 \end{vmatrix} = (m+5)(m-3)\left(m^2-2m+5\right) \;\Rightarrow\; (m+5)(m-3)\left(m^2-2m+5\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-5 \\ m=3 \end{cases}$$

El determinante se anula para $m=-5$ *y* $m=3 \Rightarrow$ *si* $m\neq -5$ *y* $m\neq 3$, $Rang\left(\overline{A}\right)=4>Rang(A) \Rightarrow$ *sistema incompatible*

Para $m=-5$, $Rang\left(\overline{A}\right)<4$

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=80 \Rightarrow Rang(A)=3=Rang\left(\overline{A}\right)=n^{o}\ \textit{incógnitas} \Rightarrow \textit{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} x-5y+3z=1 \\ x+y-5z=3 \\ 3x+y+z=-5 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{80}=-1 \; ; \; y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{80}=-1 \; ; \; z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{80}=-1$$

Para $m=3$, $Rang\left(\overline{A}\right)<4$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=16 \Rightarrow Rang(A)=3=Rang\left(\overline{A}\right)=n^{o}\ \textit{incógnitas} \Rightarrow \textit{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} x+3y+3z=1 \\ x+y+3z=3 \\ 3x+y+z=3 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{16}=1 \; ; \; y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{16}=-1 \; ; \; z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{16}=1$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3 + A - I = 0$, probar que $\det(A) \neq 0$.
Suponiendo que $\det(A^2) = 9$, calcular el valor de $\det(A^2 + I)$.

Solución:

$$Como\ \ A^3 + A - I = 0 \Rightarrow A^3 + A = I \ ; \quad A\cdot\left(A^2 + I\right) = I \Rightarrow A^{-1} = A^2 + I$$

$$entonces,\ existe\ A^{-1},\ con\ lo\ que\ |A| \neq 0.$$

$$Sabemos\ que\ \left|A^2\right| = 9 \Rightarrow \left|A^2\right| = |A\cdot A| = |A|\cdot|A| = |A|^2 \Rightarrow |A| = 3 \ \ o \ \ |A| = -3$$

$$A^2 + I = A^{-1} \Rightarrow \left|A^2 + I\right| = \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|},\ entonces\ tenemos\ que \left|A^2 + I\right| = \frac{1}{3} \ \ o \ \ \left|A^2 + I\right| = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determinar todos los valores de m para los que el siguiente sistema no tenga solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+1 \\ mx-1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero es ordenar el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+1 \\ mx-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ -3x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+1 \\ mx-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = mx+1 \\ -3x-2y = mx-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-m)x + y = 1 \\ (m+3)x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ m+3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\left(\overline{A}\right) = 2\ ,\ para\ que\ el\ sistema\ no\ tenga\ solución\ Rang(A) < 2 \Rightarrow |A| = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ m+3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2m - m - 3 = 1 - 3m \ ; \ |A| = 0 \Rightarrow 1 - 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resolver la ecuación matricial $A\cdot(X + C)B^t = D$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} ; \ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ ; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$Hay\ que\ resolver\ la\ ecuación\ \ A\cdot(X + C)\cdot B^t = D \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot(X + C)\cdot B^t\cdot\left(B^t\right)^{-1} = A^{-1}\cdot D\cdot\left(B^t\right)^{-1};$$

$$(X + C) = A^{-1}\cdot D\cdot\left(B^t\right)^{-1} \ ; \ entonces,\ la\ matriz\ X\ pedida\ será\ \ X = A^{-1}\cdot D\cdot\left(B^t\right)^{-1} - C$$

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\1&0&2\\-1&1&2\end{pmatrix}\ ,\ |A|=-3 \qquad \begin{matrix} A_{11}=\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix}=-2 & A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&-3\\1&2\end{vmatrix}=-1 & A_{31}=\begin{vmatrix}-1&-3\\0&2\end{vmatrix}=-2 \\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&2\end{vmatrix}=-4 & A_{22}=\begin{vmatrix}2&-3\\-1&2\end{vmatrix}=1 & A_{32}=-\begin{vmatrix}2&-3\\1&2\end{vmatrix}=-7 \\ A_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1 & A_{23}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}=-1 & A_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}=1 \end{matrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-4&1&-7\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Ahora buscamos $\left(B^t\right)^{-1}$

$$B^t=\begin{pmatrix}3&4\\-1&-2\end{pmatrix},\ \left|B^t\right|=-2\ ; \quad \begin{matrix}B_{11}=-2 & B_{21}=-4\\ B_{12}=1 & B_{22}=3\end{matrix} \Rightarrow \left(B^t\right)^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-2&-4\\1&3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot D\cdot\left(B^t\right)^{-1}-C=\frac{-1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-4&1&-7\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-4\\1&3\end{pmatrix}\cdot\frac{-1}{2}-\begin{pmatrix}-1&1\\-4&-1\\0&3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3&0\\6&6\\-3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-4\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\-4&-1\\0&3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&12\\-6&-6\\6&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\-4&-1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\4&1\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\\1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro λ:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1+\lambda&-\lambda\\1&\lambda&1+\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\lambda\\1\end{pmatrix}$$

__*Solución:*__

Estudiamos el rango de A según los valores de λ.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1+\lambda&-\lambda\\1&\lambda&1+\lambda\end{pmatrix}\ ,\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1+\lambda&-\lambda\\1&\lambda&1+\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)^2-\lambda-2\lambda+(1+\lambda)+\lambda^2-2(1+\lambda)=2\lambda^2-2\lambda$$

$$|A|=0\Rightarrow 2\lambda^2-2\lambda=0\ \Rightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=1\end{cases}$$

$\boxed{si\ \lambda\neq 0\ y\ \lambda\neq 1}$, $Rang(A)=Rang(\overline{A})=3 \Rightarrow$ *sistema compatible determinado* $\Rightarrow$ *solución única.*

$$\boxed{si\ \lambda=0}\ ,\ A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\ \ y\ \ \overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\1&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}2&-1&2\\1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2+1=3\neq 0$$

entonces tenemos que $Rang(A)=2\neq Rang(\overline{A})=3 \Rightarrow$ *sistema incompatible*.

$\boxed{si\ \lambda=1}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$ y $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\1&2&-1&2\\1&1&2&1\end{pmatrix}$, *como* $C_2=C_4$ *no hay menores de orden 3 distintos de cero*

$\Rightarrow Rang(A)=Rang(\overline{A})=2 \Rightarrow$ *sistema compatible indeterminado.*

Resolvemos para $\lambda=1$ $\begin{cases}x+2y=2+z\\x+y=1-2z\end{cases}$, $1^a-2^a \Rightarrow y=1+3z \Rightarrow x=-5z \Rightarrow$ *solución*: $\begin{cases}x=-5\mu\\y=1+3\mu\\z=\mu\end{cases}$

Resolvamos el sistema para el caso compatible determinado:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&2&-1\\2\lambda&1+\lambda&-\lambda\\1&\lambda&1+\lambda\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2(1+\lambda)^2-2\lambda^2-2\lambda+1+\lambda+2\lambda^2-4\lambda(1+\lambda)}{2\lambda^2-2\lambda}=\frac{-2\lambda^2-\lambda+3}{2\lambda^2-2\lambda}=\frac{(\lambda-1)(-2\lambda-3)}{2\lambda(\lambda-1)}=-\frac{2\lambda+3}{2\lambda}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&2\lambda&-\lambda\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2\lambda(1+\lambda)-1-2\lambda+2\lambda+\lambda-2(1+\lambda)}{2\lambda^2-2\lambda}=\frac{2\lambda^2+\lambda-3}{2\lambda^2-2\lambda}=\frac{(\lambda-1)(2\lambda+3)}{2\lambda(\lambda-1)}=\frac{2\lambda+3}{2\lambda}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&2\\1&1+\lambda&2\lambda\\1&\lambda&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(1+\lambda)+2\lambda+4\lambda-2(1+\lambda)-2\lambda-2}{2\lambda^2-2\lambda}=\frac{3\lambda-3}{2\lambda^2-2\lambda}=\frac{3(\lambda-1)}{2\lambda(\lambda-1)}=\frac{3}{2\lambda}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$, $a_1=(1,2,3)$; $a_2=(2,-1,1)$; $a_3=(1,-1,-1)$ se pide:

a. Comprobar si son linealmente independientes.
b. Dado $a_4\in\mathbb{R}^3$, $a_4=(3,-1,2)$, ¿depende linealmente de a_1, a_2 y a_3?
c. Encontrar una combinación lineal nula de los vectores a_1, a_2, a_3 y a_4.

Solución:

a) Veamos si los tres vectores son linealmente independientes:

$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix}=5\neq 0 \Rightarrow$ *al ser distinto de cero, las tres filas (consideradas como vectores fila) y las tres columnas (consideradas como vectores columna) son linealmente independientes* $\Rightarrow$ *los vectores* a_1,a_2,a_3 *son linealmente independientes.*

b) Como a_1,a_2,a_3 *son tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de dimensión 3* $\Rightarrow$ *son base de* $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ *cualquier otro vector de* $\mathbb{R}^3$ *se puede poner como combinación lineal de* $\{a_1,a_2,a_3\}$ $\Rightarrow$ *en particular,* $a_4=(3,-1,2)$ *depende linealmente de* $\{a_1,a_2,a_3\}$.

$c)\ a_4=\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\alpha_3\cdot a_3 \;\Rightarrow\; (3,-1,2)=\alpha_1\cdot(1,2,3)+\alpha_2\cdot(2,-1,1)+\alpha_3\cdot(1,-1,-1) \;\Rightarrow$

$$(3,-1,2)=(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) \;\Rightarrow\; \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=3\\ 2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=-1\\ 3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=2\end{cases} \;(1^{a})+(2^{a})-(3^{a})\;\Rightarrow\;\boxed{\alpha_3=0}$$

$$\Rightarrow\;\begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2=-1\\ 3\alpha_1+\alpha_2=2\end{cases}\;\Rightarrow\;\boxed{\alpha_1=\frac{1}{5}}\;,\;\boxed{\alpha_2=\frac{7}{5}}$$

También podemos resolver el sistema por la regla de Cramer:

$$\alpha_1=\frac{\begin{vmatrix}3&2&1\\-1&-1&-1\\2&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{1}{5}\;;\;\alpha_2=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\2&-1&-1\\3&2&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{7}{5}\;;\;\alpha_3=\frac{\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-1&-1\\3&1&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&-1\\3&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{0}{5}=0$$

Entonces $a_4=\frac{1}{5}\cdot a_1+\frac{7}{5}\cdot a_2+0\cdot a_3 \;\Rightarrow\; 5\cdot a_4=1\cdot a_1+7\cdot a_2+0\cdot a_3 \;\Rightarrow\; \boxed{a_1+7\cdot a_2+0\cdot a_3-5\cdot a_4=0}$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix}2x&2&3&x-1\\1&-x&1&-2\\x&5&x&4\\1&2&1&x\end{vmatrix}=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix}2x&2&3&x-1\\1&-x&1&-2\\x&5&x&4\\1&2&1&x\end{vmatrix}_{C_1=C_1-C_3}=\begin{vmatrix}2x-3&2&3&x-1\\0&-x&1&-2\\0&5&x&4\\0&2&1&x\end{vmatrix}=(2x-3)\begin{vmatrix}-x&1&-2\\5&x&4\\2&1&x\end{vmatrix}=(2x-3)\left(-x^3+3x-2\right)$$

$$(2x-3)\left(-x^3+3x-2\right)=0\;\Rightarrow\;(2x-3)(x-1)^2(-x-2)=0\;\Rightarrow\;\left\{x=\frac{3}{2}\;,\;x=1\;,\;x=-2\right\}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}$, calcular $A^{-1}\ y\ A^n;\ (a\neq 0)$.

Solución:

Como $|A|=\begin{vmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{vmatrix}=a^3\neq 0$ *puesto que* $a\neq 0 \;\Rightarrow$ *existe la matriz* A^{-1}, *calculémosla:*

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad , \quad |A|=a^3 \qquad \begin{matrix} A_{11}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}=a^2 & A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}=-a & A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}=1 \\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}=0 & A_{22}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}=a^2 & A_{32}=-\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-a \\ A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 & A_{23}=-\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 & A_{33}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}=a^2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \; A^{-1}=\frac{1}{a^3}\begin{pmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora A^n

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^5=A\cdot A^4=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{(n^2-n)a^{n-2}}{2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}=a^{n-2}\cdot\begin{pmatrix} a^2 & na & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & a^2 & na \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$