

A.1.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:

Debemos plantear un sistema para encontrar el número de acciones que hay de cada tipo:

$x \rightarrow$ número de acciones A ; $y \rightarrow$ número de acciones B ; $z \rightarrow$ número de acciones C

Valor de la acción B, 1 euro ; valor de la acción A, 3 euros ; valor de la acción C, 6 euros.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 540 & 1 & 1 \\ 1560 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{1} = 360 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 540 & 1 \\ 3 & 1560 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{1} = 120 ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 1560 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 60$$

Un reparto equitativo de las acciones es $\rightarrow$ cada hermano debe recibir $\begin{cases} 120 \text{ acciones A} \\ 40 \text{ acciones B} \\ 20 \text{ acciones C} \end{cases}$

A.2.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 4x$

Solución:

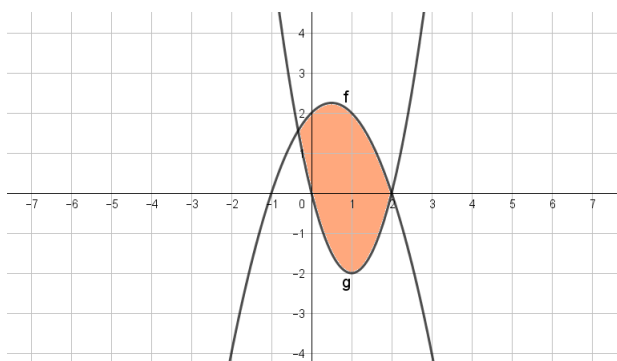
Es es área de la región delimitada por dos parábolas. Debemos encontrar los puntos de corte entre ambas parábolas:

$$\begin{cases} y = 2 + x - x^2 \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases} \rightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow \text{punto } (2, 0) \\ x = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{punto } \left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right) \end{cases}$$

Entre los puntos $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 2$, la función $f(x) > g(x)$ (está por encima debido a la forma de ambas parábolas)

Entonces:

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (2 + x - x^2 - 2x^2 + 4x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (2 + 5x - 3x^2) dx = \left[2x + \frac{5x^2}{2} - x^3 \right]_{-\frac{1}{3}}^2 = \left(4 + \frac{20}{2} - 8 \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{18} - \frac{1}{27} \right) = \frac{343}{54}$$

**A.3.**

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

- Calcular el ángulo que forman r y π .
- Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $x - y = 0$.
- Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x + y \\ 2x + 3y - (x + y) + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -1 - y \\ x = -1 - 2y \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(-1, 0, -1) \\ \vec{u} = (-2, 1, -1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$\text{Veamos el ángulo que forman } \vec{u} \text{ y } \vec{n} \rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|-4 + 1 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70,53^\circ$$

$$\text{El ángulo que forman } r \text{ y } \pi \text{ es } (90^\circ - \alpha) = 29,47^\circ$$

Tenemos que calcular el simétrico del punto $P = r \cap \pi$ con respecto del plano $\pi_1 \equiv x - y = 0$.

$$\text{Calculemos } P: \quad r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad \text{y } P \in r \Rightarrow P(-1 - 2\lambda, \lambda, -1 - \lambda), \text{ también } P \in \pi \Rightarrow 2(-1 - 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

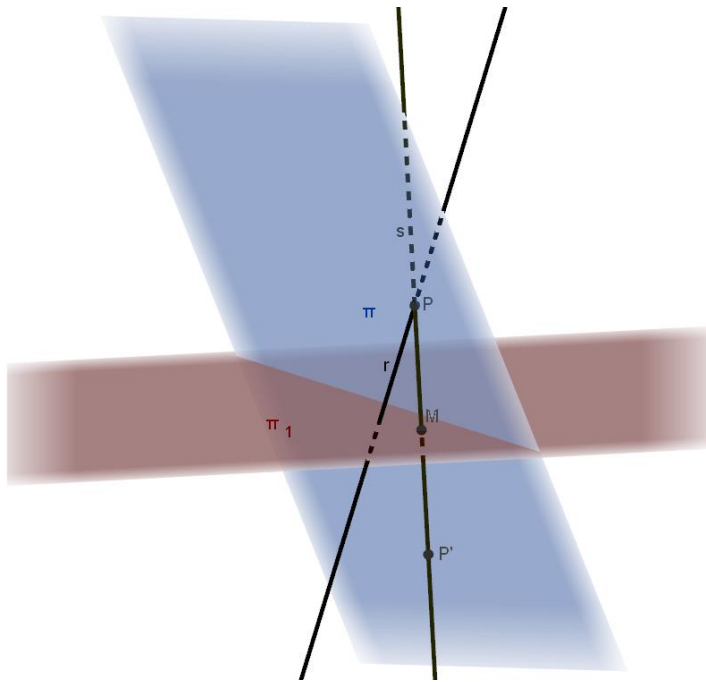
$$\text{Entonces } P(-3, 1, -2)$$

$$\text{Ahora tomamos la recta } s, \text{ perpendicular al plano } \pi_1 \equiv x - y = 0 \text{ y que pasa por el punto } P \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 \end{cases}$$

$$M = s \cap \pi_1 \Rightarrow \begin{cases} M \in s \Rightarrow M(-3 + \lambda, 1 - \lambda, -2) \\ M \in \pi_1 \Rightarrow (-3 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1, -1, -2)$$

El simétrico de P respecto de π_1 será el punto P' tal que $\overline{OP'} = 2\overline{OM} - \overline{OP}$, es decir, M es el punto medio entre P y P' .

$$\overline{OP'} = 2(-1, -1, -2) - (-3, 1, -2) \Rightarrow \overline{OP'} = (1, -3, -2) \Rightarrow P'(1, -3, -2)$$

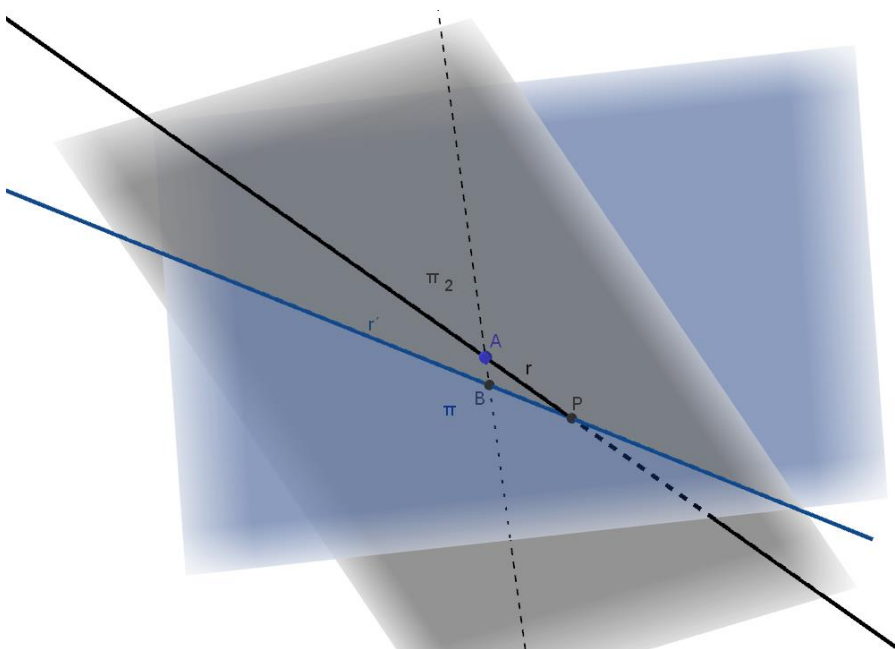


La proyección de r sobre π es una recta r' que podemos obtener como corte de dos planos, el plano π y un plano π_2 , perpendicular a π y que contiene a la recta r .

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} A(-1,0,-1) \\ \vec{u} = (-2,1,-1) \\ \vec{n} = (2,1,-1) \end{cases} \rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv -4y - 4z - 4 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv y + z + 1 = 0$$

$$r' \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

También podríamos haber obtenido s' como una recta que pasa por dos puntos, $P = r \cap \pi$ y B (proyección de A sobre π).



A.4.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

- ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de los individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?
- Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?
- ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98% de los individuos de esa especie?

Solución:

$$N(8.8, 3) \longrightarrow N(0, 1)$$

$$P(x > 10) \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(z > \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(z > 0.4) = 1 - P(z < 0.4) = 1 - 0.6554 \Rightarrow P(x > 10) = 0.3446$$

El 34.46% de los individuos supera los 10 meses de vida.

$$P(7 < x < 10) \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(\frac{7 - 8.8}{3} < z < \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(-0.6 < z < 0.4) = P(z < 0.4) - P(z < -0.6) = P(z < 0.4) - (1 - P(z < 0.6))$$

$$P(-0.6 < z < 0.4) = 0.6554 - (1 - 0.7257) = 0.3811 \Rightarrow P(7 < x < 10) = 0.3811$$

El 38.11% de los individuos ha vivido entre 7 y 10 meses.

$$p = \text{probabilidad de vivir más de 10 meses} \Rightarrow p = 0.3446 \rightarrow q = 0.6554$$

Tenemos una distribución binomial $B(4, 0.3446)$

$$P(x = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0.3446^4 \cdot 0.6554^0 = 0.3446^4 = 0.0141$$

$$P(\text{al menos uno no supere los 10 meses de vida}) = 1 - P(x = 4) = 0.9859$$

$$P(8.8 - c < x < 8.8 + c) = 0.98 \Rightarrow \begin{cases} P(x < 8.8 - c) = 0.01 \\ P(x > 8.8 + c) = 0.01 \end{cases}$$

$$N(8.8, 3) \longrightarrow N(0, 1)$$

$$P(x > 8.8 + c) = 0.01 \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(z > \frac{c}{3}\right) = 0.01 \Rightarrow P\left(z < \frac{c}{3}\right) = 0.99 \Rightarrow \frac{c}{3} = 2.327 \Rightarrow c = 6.981$$

B.1.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{array} \right\}$$

- a) Discuta el sistema según los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3a^2 - 29a + 26 \rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{26}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } a = \frac{26}{3} \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{368}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}\bar{A} = 3 \neq \text{Rang}A = 2$$

$$\text{Si } a = 1 \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}A = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -6 & 2 \\ -1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rang}\bar{A} = 3 \end{cases}$$

Discusión:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a \neq \frac{26}{3} \text{ y } a \neq 1 \Rightarrow \text{Rang}A = \text{Rang}\bar{A} = 3 = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado} \\ \text{Si } a = 1 \Rightarrow \text{Rang}A = \text{Rang}\bar{A} = 2 < n^{\circ} \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{Si } a = \frac{26}{3} \Rightarrow \text{Rang}A = 2 < \text{Rang}\bar{A} = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible} \end{array} \right.$$

Resolvamos el sistema para $a = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ -x + y = 6 + 6z \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -16 - 12z \\ y = -10 - 6z \end{cases}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -16 - 12\lambda \\ y = -10 - 6\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

B.2.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.
- Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \text{ es continua en } x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\text{Veamos si } f(x) \text{ es continua en } x=0 \begin{cases} f(0)=0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0.$$

$$f(x) \text{ es derivable en } x=0 \Leftrightarrow f'_-(0) = f'_+(0).$$

$$\text{Veamos si } f(x) \text{ es derivable en } x=0 \begin{cases} f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin h}{h} \triangleq \lim_{h \rightarrow 0^-} \cos h = 1 \\ f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^h = 1 \end{cases} \rightarrow f'_-(0) = f'_+(0)$$

$$f(x) \text{ es derivable en } x=0$$

Restringimos el dominio de la función $f(x)$ al intervalo $(-\pi, 2)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ (x+1)e^x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{En } \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{En } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, 2) f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, 2) \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = e \Rightarrow$ según el teorema de Darboux, $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f(0)$ y $f(1)$ al menos una vez en el intervalo $(0, 1)$. $f(0) < 2 < f(1) \Rightarrow$ existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^1 xe^x dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [(x-1)e^x]_0^1 = [-1-0] + [0-(-1)] = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\}$$

B.3.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

- Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
- Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .
- Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

Solución:

$\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \rightarrow$ los planos paralelos a π_1 son de la forma $\pi \equiv x + y + D = 0$

$$O(0,0,0); \begin{cases} d(O, \pi) = 2 \\ d(O, \pi) = \frac{|0+0+D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow |D| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} D = 2\sqrt{2} \\ D = -2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Los planos pedidos son: $\pi \equiv x + y + 2\sqrt{2} = 0$, $\pi' \equiv x + y - 2\sqrt{2} = 0$

$$r \equiv \begin{cases} \text{Pasa por } P(0,2,0) \\ \text{Es perpendicular a } \pi_2 \equiv x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(0,2,0) \\ \vec{n} = (1,0,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Eje } OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \text{ Eje } OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \pi_1 \cap OX \Rightarrow A(1,0,0) \\ B = \pi_1 \cap OY \Rightarrow B(0,1,0) \end{cases} \rightarrow \overline{AB} = (-1,1,0); d(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

B.4.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
- ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO_2 ” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:

$$\text{Sean los sucesos: } \begin{cases} A = \{\text{En un día se supera el nivel permitido de } NO_2\} \\ B = \{\text{En un día se supera el nivel permitido de partículas}\} \end{cases} \rightarrow P(A) = 0,16; P(B/A) = 0,33; P(B/\bar{A}) = 0,08$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,16 \cdot 0,33 = 0,0528$$

La probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos es 0,0528

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = 0,16 \cdot 0,33 + 0,84 \cdot 0,08 = 0,12$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,16 + 0,12 - 0,0528 = 0,2272$$

La probabilidad de que se supere al menos uno de los dos niveles es 0,2272

$$P(A \cap B) = 0,0528 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,16 \cdot 0,12 = 0,0192 \rightarrow \text{Los sucesos } A \text{ y } B \text{ son dependientes.}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{B}/A)}{1 - P(B)} = \frac{0,16 \cdot 0,67}{1 - 0,12} = \frac{0,1072}{0,88} = 0,1218$$

La probabilidad de que en un día se supere el nivel de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel de partículas es 0,1218