

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= a + 1 \\ -ax + y - z &= 2a \\ -y + z &= a \end{aligned} \right\}$$

Se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
- (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= a + 1 \\ -ax + y - z &= 2a \\ -y + z &= a \end{aligned} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a^2 + a \rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } a = 0 \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Como } C_1 = C_4 \Rightarrow \text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A} = 2$$

$$\text{Si } a = -1 \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang} \bar{A} = 3$$

Discusión:

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq 0 \text{ y } a \neq -1 \Rightarrow \text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A} = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado} \\ \text{Si } a = 0 \Rightarrow \text{Rang} A = \text{Rang} \bar{A} = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{Si } a = -1 \Rightarrow \text{Rang} A = 2 < \text{Rang} \bar{A} = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible} \end{cases}$$

$$\text{Si } a = 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} x + z &= 1 \\ y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{aligned} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} x + z &= 1 \\ y - z &= 0 \\ \cancel{-y + z = 0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= 1 - z \\ y &= z \end{aligned} \rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

- (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
- (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
- (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 ; \quad g(x) = 6x$$

$$\text{Sea la función } h(x) = f(x) - g(x) \rightarrow h(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$$

$h(x)$ es continua en el intervalo $[1, 10]$, por ser una función polinómica, $h(1) = -3 < 0$ y $h(10) = 1239 > 0$, con lo que se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano $\Rightarrow$ existe, al menos, $c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$. Por tanto, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ toman el mismo valor en un punto c , $1 < c < 10$.

La pendiente de la recta tangente a curva $y = f(x)$ en un punto $x = x_0$ es $m = f'(x_0)$. Esa pendiente depende del punto de tangencia.

$$m(x) = f'(x); \text{ veamos cuándo es mínima: } \begin{cases} m(x) = 3x^2 + 6x \\ m'(x) = 6x + 6 \Rightarrow m'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \\ m''(x) = 6 \rightarrow m''(-1) = 6 > 0 \rightarrow \text{en el punto } x = -1 \text{ la pendiente es mínima} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} m(-1) = -3 \rightarrow \text{pendiente } m = -3 \\ \text{punto de tangencia } (-1, f(-1)) = (-1, 1) \end{array} \right\} \text{ la recta tangente es } r \equiv y - 1 = -3(x + 1) \rightarrow y = -3x - 2$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx - \int_1^2 \frac{1}{6x} dx = \frac{1}{6} \int_1^2 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x dx - \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \frac{1}{6} [\ln|x|]_1^2 = \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{6} (\ln|2| - \ln|1|) = \frac{7}{18} + \frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{6} = \frac{41 - 6 \ln 2}{36} \end{aligned}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$,

se pide:

- (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
- (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 3(2 + y) - z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ z = 7 + 3y \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(2, 0, 7) \\ \vec{u} = (1, 1, 3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(-1, -4, 0) \\ \vec{v} = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -4, -7) \rightarrow \begin{vmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

$$\text{Plano perpendicular a } r \text{ y que pasa por } P(2, -1, 5) \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{n} = \vec{u} = (1, 1, 3) \\ P(2, -1, 5) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y + 1) + 3 \cdot (z - 5) = 0$$

$$\pi \equiv x + y + 3z - 16 = 0$$

$$\text{Plano paralelo a } r \text{ y que contiene a } s \rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} \vec{u} = (1, 1, 3) \\ \vec{v} = (2, -1, 1) \\ B(-1, -4, 0) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda + 2\mu \\ y = -4 + \lambda - \mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases} \text{ o } \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi' \equiv 4x + 5y - 3z + 24 = 0$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
- (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
- (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

$$A_n = \{\text{acertar con la flecha número } n\} ; F_n = \{\text{Fallar con la flecha número } n\} \rightarrow F_n = \bar{A}_n$$

Los sucesos asociados a flechas diferentes, son independientes.

$$P(\text{acertar antes del 4º disparo}) = P(A_1) + P(F_1 \cap A_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap A_3) = P(A_1) + P(F_1) \cdot P(A_2) + P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(A_3) = 0,3 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,79$$

$$P(\text{fallar los 4 disparos}) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(F_3) \cdot P(F_4) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$$

$$B(10, 0,85) \rightarrow P(x=6) = \binom{10}{6} \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 0,04$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:

$x \rightarrow$ precio del kg de dorada, en euros.

$y \rightarrow$ precio del kg de lubina, en euros.

$z \rightarrow$ precio del kg de rodaballo, en euros.

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = y + 0,11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1374x + 2344y = 21220 \\ 74z = 636 \\ x = y + 0,11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5,78 \\ y = 5,67 \\ z = 8,59 \end{cases}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.
 b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.
 c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $[-4, 1)$ y $(1, 4]$ por ser una función polinómica en ambos intervalos.

$$\text{Veamos si } f(x) \text{ es continua en } x=1 \quad \begin{cases} f(1)=0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=1.$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $[-4, 4]$

$f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en $x=1$ por ser una función polinómica.

$$\text{Veamos si } f(x) \text{ es derivable en } x=1 \quad \begin{cases} f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0 \\ f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^2 = 0 \end{cases} \rightarrow f'_-(1) = f'_+(1)$$

$f(x)$ es derivable en $x=1$

La función $f(x)$ es derivable en $(-\infty, +\infty)$, pero si restringimos el dominio al intervalo $[-4, 4]$, podemos asegurar que $f(x)$ es derivable en $(-4, 4)$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{En } (-\infty, 1) \quad f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (-\infty, 1) \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } [-4, 1) \\ \text{En } (1, +\infty) \quad f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (1, +\infty) \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (1, 4] \end{cases}$$

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \text{como } f(x) \text{ es derivable en } x=1 \Rightarrow g(x) \text{ está definida y es continua en } x=1.$$

$$\text{Veamos si } g(x) \text{ es derivable en } x=1 \quad \begin{cases} g'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 2 = 2 \\ g'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 3h = 0 \end{cases} \rightarrow g'_-(1) \neq g'_+(1)$$

$g(x)$ no es derivable en $x=1$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

- (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
- (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .
- (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

Solución:

$$P(-3, 1, 2) ; \quad Q(-1, 0, 1) ; \quad \pi \equiv x + 2y - 3z = 4$$

Proyección de Q sobre $\pi \rightarrow$ será el punto $Q' = r \cap \pi$, siendo r la recta perpendicular a π que pasa por Q .

$$r \equiv \begin{cases} Q(-1, 0, 1) \\ \vec{n} = (1, 2, -3) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \rightarrow Q'(-1 + \lambda, 2\lambda, 1 - 3\lambda)$$

$$Q' \in \pi \rightarrow (-1 + \lambda) + 2(2\lambda) - 3(1 - 3\lambda) = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{7} \rightarrow Q'\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

$$\pi' \text{ plano paralelo a } \pi \text{ que pasa por } P \rightarrow \pi' \equiv (x + 3) + 2(y - 1) - 3(z - 2) = 0 \rightarrow \pi' \equiv x + 2y - 3z + 7 = 0$$

$$\pi'' \text{ plano perpendicular a } \pi \text{ que contiene a los puntos } P \text{ y } Q \rightarrow \pi'' \equiv \begin{cases} Q(-1, 0, 1) \\ \vec{n} = (1, 2, -3) \\ \overrightarrow{PQ} = (-2, 1, 1) \end{cases} \rightarrow \pi'' \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 1 - 3\lambda + \mu \end{cases}$$

$$\text{Si preferimos la forma general} \rightarrow \pi'' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi'' \equiv x + y + z = 0$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

- a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?
- b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?
- c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).
- d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}|A)$.

Solución:

$$P(A) = 0,5 ; P(B) = 0,25 ; P(A \cap B) = 0,125$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } C \text{ es incompatible con } A \rightarrow A \cap C = \emptyset \text{ y } P(A \cap C) = 0 \\ \text{Si } C \text{ es incompatible con } B \rightarrow B \cap C = \emptyset \text{ y } P(B \cap C) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (A \cup B) \cap C = \emptyset \text{ y } P((A \cup B) \cap C) = 0$$

C es incompatible con $A \cup B$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,125 \\ P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \end{array} \right\} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes.}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,625 = 0,375$$

$$P(\bar{B} | A) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,25 = 0,75 \text{ porque si } A \text{ y } B \text{ son independientes, también lo son } A \text{ y } \bar{B}.$$