Opción A

(Álgebra lineal. 3ª ev.)

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir el sistema $\begin{cases} 2x-my+z=2-m \\ x+2y+z=0 \\ 3x+2z=2-m \\ (m+2)x+2y+3z=0 \end{cases}$, y resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

Como es un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas comenzamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}_{F_3=F_3-F_1} = \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(2-m)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m+2 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{C_1=C_1-C_3} =$$

$$=(m-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ m-1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (m-2)(m-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -(m-2)^2(m-1)$$

El determinante se anula para $m=1$ *y* $m=2 \Rightarrow$ *si* $m\neq 1$ *y* $m\neq 2$, $Rang(\overline{A})=4>Rang(A) \Rightarrow$ *sistema incompatible*

Para $m=1$, $Rang(\overline{A})<4$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 ; \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow Rang(A)=3=Rang(\overline{A})=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow sistema\ compatible\ determinado$$

$$\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+2z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{1}=1 \ ; \ y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1}=0 \ ; \ z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1}=-1$$

Para $m=2$, *es un sistema homogéneo* $\Rightarrow$ *siempre compatible*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 ; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rang(A)=2=Rang(\overline{A}) \Rightarrow sistema\ compatible\ indeterminado$$

$$\begin{cases} 2x-2y=-z \\ x+2y=-z \end{cases} \Rightarrow 3x=-2z \Rightarrow x=-\frac{2}{3}z \ ; \ y=-\frac{1}{6}z \quad \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3}\lambda \\ y=-\frac{1}{6}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$ cumple que $A^3=-A-I$.

Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3=-A-I$ y se sabe que $\det(A)=m$, calcula el valor de $\det(A+I)$ en función de m.

Solución:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix} \quad ; \quad A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\-2&1&-2\end{pmatrix}$$

$$-A-I=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\-2&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\-2&1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=-A-I$$

$$A\in M_{n\times n}\ ;\ \det(A)=m\ ;\ A^3=-A-I\Rightarrow A+I=-A^3\ ;\ |A+I|=|-A^3|=|-A|\cdot|A|\cdot|A|=(-1)^n\cdot|A|^3=(-1)^n\cdot m^3$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Estudia el rango de la matriz A según los valores de los parámetros a y b.

$$A=\begin{pmatrix}a&b&1\\1&ab&1\\1&b&a\end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&1\\1&ab&1\\1&b&a\end{vmatrix}_{también\ \downarrow}=b\cdot\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=b\left(a^3-3a+2\right)=b(a-1)^2(a+2)\ ;\ |A|=0\Rightarrow b(a-1)^2(a+2)=0\Rightarrow\{b=0\ ,\ a=1\ ,\ a=-2\}$$

$$b\cdot\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2-F_1\\F_3=F_3-F_1}}=b\cdot\begin{vmatrix}a&1&1\\1-a&a-1&0\\1-a&0&a-1\end{vmatrix}_{C_1=C_1+C_2+C_3}=b\cdot\begin{vmatrix}a+2&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=b(a-1)^2(a+2)$$

$Si\ \ b\neq0\ ,\ a\neq1\ \ y\ \ a\neq-2\Rightarrow Rang(A)=3$

$Si\ \ a=1\ ,\ A=\begin{pmatrix}1&b&1\\1&b&1\\1&b&1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang(A)=1\ \ (puesto\ que\ A\ tiene\ tres\ filas\ iguales)$

$Si\ \ a=-2\ ,\ A=\begin{pmatrix}-2&b&1\\1&-2b&1\\1&b&-2\end{pmatrix},\ el\ menor\ \begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow Rang(A)=2$

$Si\ \ b=0\ ,(a\neq1),\ A=\begin{pmatrix}a&0&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix},\ el\ menor\ \begin{vmatrix}a&1\\1&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow Rang(A)=2$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a. Razona para qué valores de k la matriz $B^t \cdot A^t$ tiene inversa y obtenla en función de k.

b. Resuelve la ecuación $(AB)^t \cdot X = I$, para $k=0$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

apartado a)

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

$\left(B^t \cdot A^t\right)$ *tiene inversa* $\Leftrightarrow \left|B^t \cdot A^t\right| \neq 0$; $\left|B^t \cdot A^t\right| = \begin{vmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = (-1+2k)(k+2)-3k = 2k^2-2$; $\left|B^t \cdot A^t\right| = 0 \Rightarrow 2k^2-2=0 \Rightarrow k=\pm 1$

entonces $\left(B^t \cdot A^t\right)$ *tiene inversa cuando* $k \neq 1$ y $k \neq -1$.

Calculemos ahora $\left(B^t \cdot A^t\right)^{-1}$; *llamamos* $M = \begin{pmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$, *y sabemos que* $|M| = 2k^2-2$

$$\begin{matrix} M_{11} = k+2 & M_{21} = -k \\ M_{12} = -3 & M_{22} = -1+2k \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \left(B^t \cdot A^t\right)^{-1} = \frac{1}{2k^2-2}\begin{pmatrix} k+2 & -k \\ -3 & -1+2k \end{pmatrix}$$

apartado b)

Hay que resolver la ecuación $(A\cdot B)^t \cdot X = I \Rightarrow X = \left[(A\cdot B)^t\right]^{-1} \cdot I \Rightarrow X = \left[(A\cdot B)^t\right]^{-1}$ $(para\ k=0)$

si no nos hemos dado cuenta, calculamos $(A\cdot B)^t$; $A\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2k & 3 \\ k & k+2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

y observamos que $(A\cdot B)^t = \left(B^t \cdot A^t\right)$ *igualdad que es cierta siempre que existan los productos, entonces*

$$X = \left[(A\cdot B)^t\right]^{-1} = \left(B^t \cdot A^t\right)^{-1} \ (para\ k=0) \Rightarrow X = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

también se puede calcular $(A\cdot B)^t$ $(para\ k=0)$ *y encontrar "de nuevo" su inversa.*

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discute y resuelve el sistema según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x-2y+4z=0 \\ x-(\lambda+1)y+z=0 \\ -x+\lambda y-z=0 \end{cases}$$

Solución:

El sistema es homogéneo con lo que sabemos que será compatible para todo valor de λ.

$$A=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & -(\lambda+1) & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \ , \ |A|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & -(\lambda+1) & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \end{vmatrix}_{F_2=F_2+F_3}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-(\lambda-1+4)=-(\lambda+3)$$

$$|A|=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

$$si \ \ \lambda\neq-3 \ , \ Rang(A)=Rang(\overline{A})=3 \ \Rightarrow \ sistema\ compatible\ determinado \ \Rightarrow \ solución\ \{x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\}$$

$$si\ \lambda=-3\ ,\ A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=10 \Rightarrow Rang(A)=Rang(\overline{A})=2 \ \Rightarrow \ sistema\ compatible\ indeterminado$$

$$\begin{cases} 4x-2y=-4z \\ x+2y=-z \end{cases} \ , \ 1^a+2^a \Rightarrow 5x=-5z \Rightarrow x=-z \ \ ; \ \ y=0 \ \Rightarrow \ solución: \begin{cases} x=-\mu \\ y=0 \\ z=\mu \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resuelve la ecuación matricial $B\cdot(2A+I)=A\cdot X\cdot A+B$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Tenemos la ecuación $B\cdot(2A+I)=A\cdot X\cdot A+B \Rightarrow 2B\cdot A+B=A\cdot X\cdot A+B \Rightarrow 2B\cdot A=A\cdot X\cdot A \Rightarrow A^{-1}\cdot(2B\cdot A)\cdot A^{-1}=X$

entonces $X=A^{-1}\cdot(2B)$

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ |A|=1$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2 \quad A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2 \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=7 \quad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4 \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

$$X=A^{-1}\cdot(2B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4+F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & x+1 & 7 & 0 \\ 3 & x^2-1 & 11 & 0 \\ 9 & x^3+1 & 37 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & x+1 & 7 \\ 3 & (x+1)(x-1) & 11 \\ 9 & (x+1)(x^2-x+1) & 37 \end{vmatrix} = -3(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & x-1 & 11 \\ 3 & x^2-x+1 & 37 \end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}} = -3(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & x-2 & 4 \\ 0 & x^2-x-2 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ x^2-x-2 & 16 \end{vmatrix} = -12(x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x^2-x-2 & 4 \end{vmatrix} = -12(x+1)\left(4x-8-x^2+x+2\right) = -12(x+1)\left(-x^2+5x-6\right) = 12(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$12(x+1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \{x=-1 \ , \ x=2 \ , \ x=3\}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Discutir y resolver, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m-2)z=1 \\ mx+3y+mz=2 \end{cases}$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-2 \\ m & 3 & m \end{pmatrix} \ , \ buscamos \ posibles \ menores \ de \ orden \ 2 \ distintos \ de \ cero;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 3-m=0 \Rightarrow m=3 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ m & m \end{vmatrix} \Rightarrow 3m-m^2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases} \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 3 & m \end{vmatrix} \Rightarrow 6-2m=0 \Rightarrow m=3$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-2 & 1 \\ m & 3 & m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\left(\bar{A}\right)=2$$

$$si \ m\neq 3 \ , \ Rang(A)=Rang\left(\bar{A}\right)=2 \Rightarrow sistema \ compatible \ indeterminado$$

$$si \ m=3 \ , \ Rang(A)=1\neq Rang\left(\bar{A}\right)=2 \Rightarrow sistema \ incompatible$$

$$resolvemos \ para \ m\neq 3$$

$$\begin{cases} x+y=1-(m-2)z \\ mx+3y=2-mz \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-(m-2)z & 1 \\ 2-mz & 3 \end{vmatrix}}{3-m}=\dfrac{1+(6-2m)z}{3-m} \\ \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-(m-2)z \\ m & 2-mz \end{vmatrix}}{3-m}=\dfrac{(2-m)+\left(m^2-3m\right)z}{3-m} \end{array} \right. \Rightarrow \ Solución: \begin{cases} x=\dfrac{1+(6-2m)\lambda}{3-m} \\ y=\dfrac{(2-m)+\left(m^2-3m\right)\lambda}{3-m} \\ z=\lambda \end{cases}$$

1ª evaluación

Ejercicio 1.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{|x|}{1+x^2}$.

a. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

b. Encuentra los máximos y mínimos de $f(x)$.

c. Calcula la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=2$.

Solución:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{1+x^2} & si\ \ x<0\\[2mm] \dfrac{x}{1+x^2} & si\ \ x\geq 0\end{cases}\quad ;$$

$f(x)$ está definida por dos ramas que son siempre continuas y derivables, puesto que son cociente de polinomios y $1+x^2\neq 0$. Hay que analizar la continuidad y derivabilidad en $x=0$

$$f(0)=0\ ,\quad \lim_{x\to 0}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{1+x^2}=0\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+x^2}=0\end{cases}\ \Rightarrow\ f(x)\ \textit{es continua en } x=0$$

$$\begin{cases}f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\frac{-h}{1+h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-1}{1+h^2}=-1\\[2mm] f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\frac{h}{1+h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{1+h^2}=1\end{cases}\ \Rightarrow\ f(x)\ \textit{no es derivable en } x=0$$

$f(x)\geq 0$, y $f(x)=0$ en el punto $x=0\Rightarrow$ por tanto en $(0,0)$ $f(x)$ tiene un mínimo, que no aparecerá al derivar ya que en $x=0$ la función no es derivable.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2} & si\ x<0\\[2mm] \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & si\ x>0\end{cases}\ \Rightarrow\ f'(x)=0\ \ \begin{cases}x^2-1=0\ \Rightarrow\ x=-1 & (es\ para\ valores\ x<0)\\ 1-x^2=0\ \Rightarrow\ x=1 & (es\ para\ valores\ x>0)\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3} & si\ x<0\\[2mm] \dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} & si\ x>0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}f''(-1)<0\ \Rightarrow\ \textit{en el punto}\ \left(-1\,,\,\dfrac{1}{2}\right)\ \textit{hay un máximo}\\[2mm] f''(1)<0\ \Rightarrow\ \textit{en el punto}\ \left(1\,,\,\dfrac{1}{2}\right)\ \textit{hay un máximo}\end{cases}$$

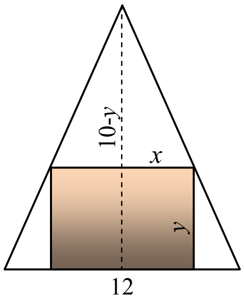
Para calcular la recta tangente necesitamos el punto de tangencia $(x_0\,,y_0)=\left(2\,,\,\dfrac{2}{5}\right)$ y la pendiente $m=f'(2)=-\dfrac{3}{25}$

$$r_{tg}\equiv y-\frac{2}{5}=-\frac{3}{25}(x-2)\ \Rightarrow\ r_{tg}\equiv y=\frac{-3x+16}{25}$$

Ejercicio 2.

En un triángulo isósceles de base 12 cm (correspondiente al lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados está sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales del triángulo. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Solución:



$\text{Área del rectángulo} = 2xy$

$\text{tenemos la relación de semejanza} \quad \dfrac{10-y}{x} = \dfrac{10}{6} \Rightarrow 60 - 6y = 10x \Rightarrow y = \dfrac{60-10x}{6}$

$\text{la función a maximizar es} \quad A(x) = 2x\dfrac{60-10x}{6} \Rightarrow A(x) = \dfrac{60x-10x^2}{3}$

$A'(x) = \dfrac{60-20x}{3} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 20x = 0 \Rightarrow x = 3$

$A''(x) = -\dfrac{20}{3} \quad , \quad A''(3) = -\dfrac{20}{3} < 0 \Rightarrow \text{para } x = 3,\ A(x) \text{ es máxima.}$

$\text{Dimensiones del rectángulo: base} = 6 \text{ cm} \ ; \ \text{altura} = 5 \text{ cm}$

Ejercicio 3.

a. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x}$

b. Dada la función $f(x) = x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (1\ ,\ 2)$ tal que $f'(\alpha) = -2$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} = A \quad \left(\text{indeterminación } 1^{\infty} \right)$$

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}{\cos x} = (L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{\frac{2}{\pi} - \operatorname{sen} x}{\frac{2x}{\pi} + \cos x}}{-\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{2}{\pi} - 1}{\frac{1+0}{-1}} = \frac{\pi - 2}{\pi} \Rightarrow A = e^{\frac{\pi-2}{\pi}} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} = e^{\frac{\pi-2}{\pi}}$$

b)

$f(x) = x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ *es continua en* $[1\ ,\ 2]$ *y derivable en* $(1\ ,\ 2)$ *por ser producto de funciones continuas y derivables* $\Rightarrow$ *cumple*

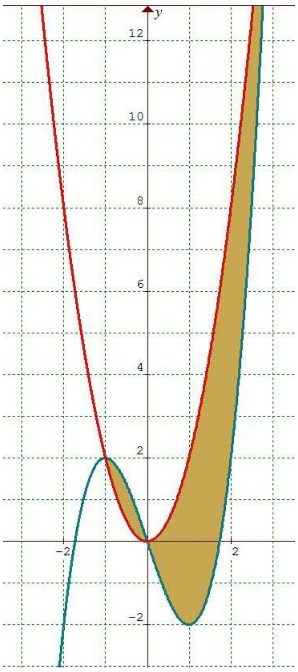
las hipótesis del teorema del valor medio $\Rightarrow \exists\, \alpha \in (1\ ,\ 2)$ *tal que* $f'(\alpha) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = \dfrac{2\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}}{1} = -2$

2ª evaluación

Ejercicio 1.

Esboza las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x$ y $g(x)=2x^2$, y calcula el área del recinto limitado por ambas curvas.

Solución:



$f(x)=x^3-3x$

Dom $f=\mathbb{R}$; *corta al eje OX en los puntos* $(-\sqrt{3},0)$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$; *al ser polinómica no tiene asíntotas.*

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f(x)\Rightarrow$ *es simétrica respecto del origen de coordenadas.*

$f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$

$f''(x)=6x$, $\begin{cases}f''(1)>0\Rightarrow \text{en el punto } (1,-2) \text{ hay un mínimo}\\ f''(-1)<0\Rightarrow \text{en el punto } (-1,2) \text{ hay un máximo}\end{cases}$; *en* $(0,0)$ *hay punto de inflexión.*

$g(x)=2x^2$ *es una parábola que tiene su vértice en* $(0,0)$

Cortes entre ambas curvas $f(x)=g(x)\Rightarrow x^3-3x=2x^2\Rightarrow x(x^2-2x-3)=0\Rightarrow\{x=0\ ,\ x=-1\ ,\ x=3\}$

se cortan en los puntos $(-1,2)$, $(0,0)$ *y* $(3,18)$

El área pedida será $A=\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{3}(g(x)-f(x))dx$

$$A=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-3x)dx+\int_{0}^{3}(-x^3+2x^2+3x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}=$$

$$=\left[0-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\right]+\left[\left(-\frac{81}{4}+\frac{54}{3}+\frac{27}{2}\right)-0\right]=\frac{71}{6}$$

Ejercicio 2.

- Calcula el valor de $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\cdot sen(x^2)\,dx$.
- Calcula la primitiva de la función $f(x)=\ln(1-x^2)$ cuya gráfica pasa por el punto $(0\ ,\ 1)$.

Solución:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\cdot sen(x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}2x\cdot(-sen(x^2))\,dx=-\frac{1}{2}\left[\cos(x^2)\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}=-\frac{1}{2}\left[\cos(2\pi)-\cos(\pi)\right]=-\frac{1}{2}\left[1-(-1)\right]=-1$$

$$F(x)=\int \ln(1-x^2)\,dx = x\cdot\ln(1-x^2)-\int x\cdot\frac{-2x}{1-x^2}dx = x\cdot\ln(1-x^2)+2\int\frac{x^2}{1-x^2}dx = x\cdot\ln(1-x^2)+2\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx =$$

$$\uparrow\left\{\begin{array}{l} u=\ln(1-x^2)\ \Rightarrow du=\dfrac{-2x}{1-x^2}dx \\ dv=dx\ \Rightarrow\ v=x \end{array}\right\}$$

$$= x\cdot\ln(1-x^2)-2\int dx+2\int\frac{1}{1-x^2}dx = x\cdot\ln(1-x^2)-2\int dx+\int\frac{1}{1+x}dx-\int\frac{-1}{1-x}dx = x\cdot\ln(1-x^2)-2x+\ln|1+x|-\ln|1-x|+C$$

$$\uparrow\left\{\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}=\frac{(B-A)x+A+B}{1-x^2}\quad\Rightarrow\ \frac{1}{1-x^2}=\frac{1/2}{1+x}+\frac{1/2}{1-x}\right\}$$

$F(x)=x\cdot\ln(1-x^2)-2x+\ln|1+x|-\ln|1-x|+C$; *como sabemos que* $F(0)=1\ \Rightarrow\ C=1$

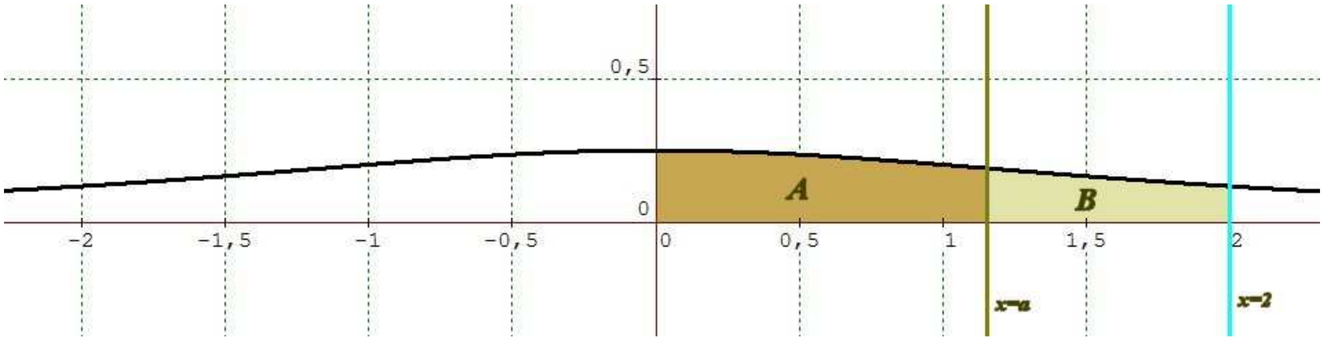
para que exista $\ln(1-x^2)\ \Rightarrow\ -1<x<1$, *entonces podemos quitar los valores absolutos y nos queda*:

$$F(x)=x\cdot\ln(1-x^2)-2x+\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+1$$

Ejercicio 3.

Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por el eje OX, el eje OY, la recta $x=2$ y la curva $y=\dfrac{1}{4+x^2}$. Encontrar el valor de α para que la recta $x=\alpha$ divida la región R en dos partes $A\ (izquierda)$ y $B\ (derecha)$, tales que el área de A sea el doble que la de B.

Solución:



$$A=2B\ \Rightarrow\ \int_0^\alpha\frac{1}{4+x^2}dx=2\int_\alpha^2\frac{1}{4+x^2}dx$$

$$\int\frac{1}{4+x^2}dx=\frac14\int\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}dx=\frac14\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=\frac24\int\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=\frac12 arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)+C$$

$$\int_0^\alpha\frac{1}{4+x^2}dx=2\int_\alpha^2\frac{1}{4+x^2}dx\ \Rightarrow\ \frac12\left[arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]_0^\alpha=2\cdot\frac12\left[arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]_\alpha^2\ \Rightarrow\ \frac12 arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=arctg(1)-arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \Rightarrow\ \frac12 arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac12 arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)+arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \frac32 arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt3}{3}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{2\sqrt3}{3}$$