

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Obtener el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 \ln(1+4t^2) dt}{x^5}$$

Aplicación del teorema fundamental del cálculo integral: "Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces la función

$A(x) = \int_a^x f(t) dt$ es derivable en $[a, b]$ y $A'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ "

Como es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, estamos en las condiciones del teorema de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 \ln(1+4t^2) dt}{x^5} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+4x^2)}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{5x^2} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8x}{1+4x^2}}{10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{10(1+4x^2)} = \frac{4}{5}$$

$\triangleq$ (indica que aplicamos la regla de L'Hôpital)

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las integrales indefinidas:

$$a) \int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} dx$$

Es una integral racional, factorizamos el denominador y separamos en fracciones simples

$$\frac{x^2+5}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B+C=0 \\ A=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-4 \\ C=6 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2+5}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{5}{x} dx + \int \frac{-4}{x-1} dx + \int \frac{6}{(x-1)^2} dx = 5 \int \frac{1}{x} dx - 4 \int \frac{1}{x-1} dx + 6 \int (x-1)^{-2} dx = 5 \ln|x| - 4 \ln|x-1| - \frac{6}{x-1} + c$$

b) $\int \frac{\sin 3x}{e^x} dx = \int e^{-x} \cdot \sin 3x \cdot dx$ (aplicamos la integración por partes)

$$u = \sin 3x \Rightarrow du = 3 \cos 3x dx \quad / \quad dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$\int e^{-x} \sin 3x dx = -e^{-x} \sin 3x - \int -e^{-x} 3 \cos 3x dx = -e^{-x} \sin 3x + 3 \int e^{-x} \cos 3x dx = (*)$$

$$u = \cos 3x \Rightarrow du = -3 \sin 3x dx \quad / \quad dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$(*) = -e^{-x} \sin 3x + 3 \left[-e^{-x} \cos 3x - \int e^{-x} 3 \sin 3x dx \right] \Rightarrow$$

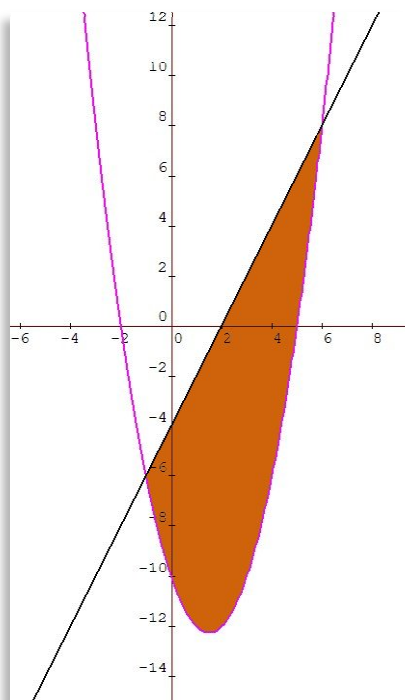
$$\int e^{-x} \sin 3x dx = -e^{-x} \sin 3x - 3e^{-x} \cos 3x - 9 \int e^{-x} \sin 3x dx \Rightarrow 10 \int e^{-x} \sin 3x dx = -e^{-x} \sin 3x - 3e^{-x} \cos 3x$$

$$\int e^{-x} \sin 3x dx = \frac{-e^{-x} (\sin 3x + 3 \cos 3x)}{10} + c$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 3x - 10$, $y = 2x - 4$.

Representamos las funciones para visualizar el área pedida



Calculamos los puntos de corte entre las curvas

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 10 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^6 [(2x - 4) - (x^2 - 3x - 10)] dx = \int_{-1}^6 (-x^2 + 5x + 6) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^6 = \left[\left(-\frac{216}{3} + \frac{180}{2} + 36 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6 \right) \right] = \\ &= 60 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{343}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

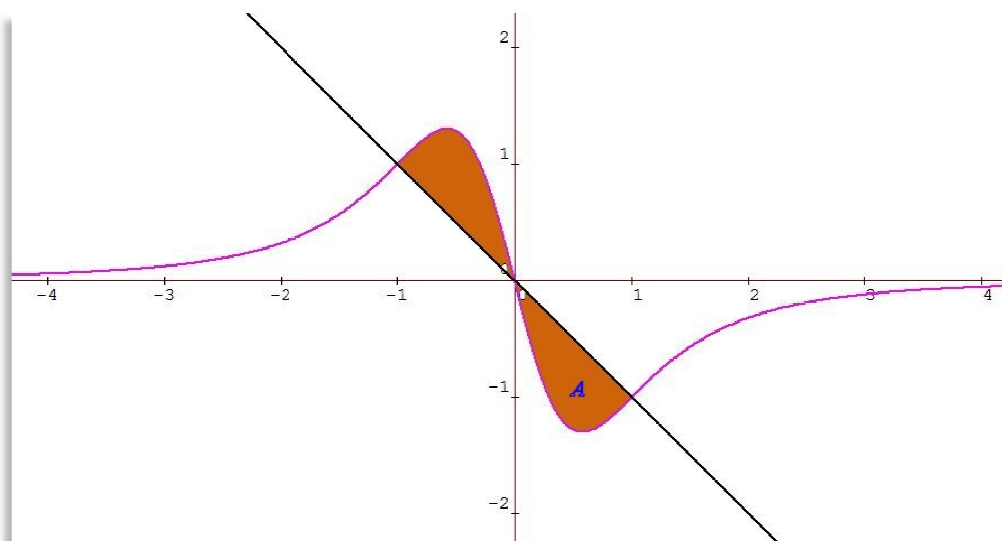
Determina el área comprendida entre las curvas $f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ y $g(x) = -x$. Dibuja la situación representando para ello las funciones dadas.

La función $f(x)$ tiene dominio todos los números reales, corta a los ejes en el origen de coordenadas, así mismo es simétrica puesto que $f(-x) = -f(x)$, tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$ puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{2(1+x^2)2x} = 0. \text{ Derivando obtenemos que } f'(x) = \frac{12x^2 - 4}{(1+x^2)^3}, \text{ vemos que } f'(x) = 0$$

$$\text{en los puntos } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ y } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Derivamos otra vez } f''(x) = \frac{48x - 48x^3}{(1+x^2)^4} \text{ y deducimos que en } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay}$$

un mínimo ya que $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$, del mismo modo en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay un máximo; además como $f''(x) = 0$ en $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, hay 3 puntos de inflexión.



El área pedida será igual a $2A$, para calcularla debemos encontrar los puntos de corte de las dos funciones.

$$-x = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow x(1+x^2)^2 = 4x \Rightarrow x[(1+x^2)^2 - 4] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1+x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \cancel{1+x^2 = -2} \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 \left(-x - \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \right) dx = -\int_0^1 x dx + 2 \int_0^1 (1+x^2)^{-2} 2x dx = -\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{-1}{(1+x^2)} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

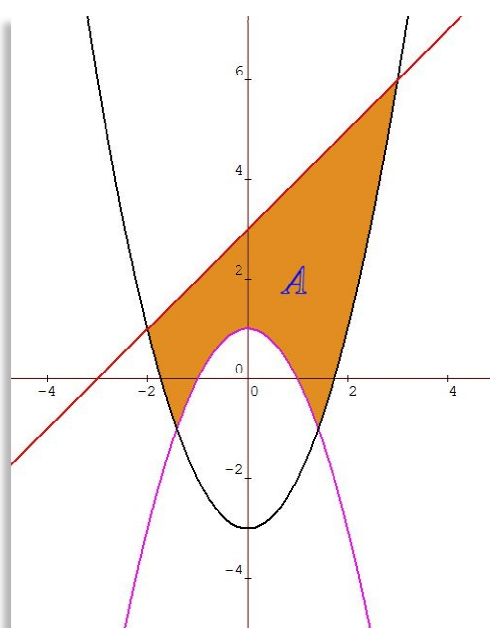
Entonces el área pedida es $2A = 1$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el área del recinto plano limitado por las gráficas de las **tres funciones** siguientes:

$$y = 1 - x^2, \quad y = x^2 - 3, \quad y = x + 3.$$



Representamos las funciones para tener una idea clara de la región de la que debemos calcular el área.

Calculamos los puntos de corte entre las curvas:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

entonces el área pedida es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1/\sqrt{2}} [(x+3) - (x^2-3)] dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} [(x+3) - (1-x^2)] dx + \int_{1/\sqrt{2}}^3 [(x+3) - (x^2-3)] dx = \\ &= \int_{-2}^{-1/\sqrt{2}} (-x^2 + x + 6) dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (x^2 + x + 2) dx + \int_{1/\sqrt{2}}^3 (-x^2 + x + 6) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-1/\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{1/\sqrt{2}}^3 = \frac{125 - 22\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$. Esboza la gráfica de la curva $y = f(x)$ y calcula un número $p > 0$ para que el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = p$ sea $\frac{1}{9}$.

La función $f(x)$ tiene dominio todos los números reales, corta a los ejes en el origen de coordenadas, no es simétrica y tampoco tiene asíntotas verticales ni oblicuas, sin embargo $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{3x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-3x}} \hat{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-3e^{-3x}} = \frac{1}{-3e^{\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

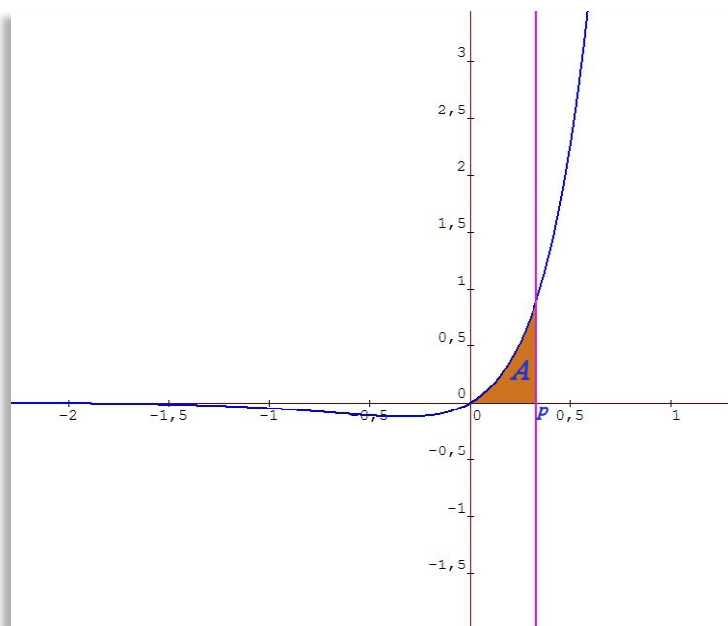
Derivamos e igualamos a cero para buscar los extremos de la función

$$f'(x) = e^{3x} + 3x \cdot e^{3x} \Rightarrow f'(x) = e^{3x}(3x+1); \quad f'(x) = 0 \Rightarrow e^{3x}(3x+1) = 0 \Rightarrow (3x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f''(x) = 3e^{3x}(3x+1) + 3e^{3x} \Rightarrow f''(x) = 3e^{3x}(3x+2); \quad f''\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow \text{en } x = -\frac{1}{3} \text{ hay un mínimo.}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3e^{3x}(3x+2) = 0 \Rightarrow (3x+2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}; \quad \text{en } \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) f(x) \text{ crece y en } \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \text{ decrece.}$$



$$A = \frac{1}{9}, \text{ pero también } A = \int_0^p x \cdot e^{3x} dx$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes para calcular una primitiva de $f(x)$

$$\int x \cdot e^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$$

$$\int_0^p x \cdot e^{3x} dx = \left[\frac{e^{3x}(3x-1)}{9} \right]_0^p = \frac{e^{3p}(3p-1)}{9} - \left(-\frac{1}{9} \right)$$

Igualando la integral definida al valor del área obtenemos p

$$\frac{e^{3p}(3p-1)}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{e^{3p}(3p-1)}{9} = 0 \Rightarrow 3p-1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

De la función $f(x)$ se sabe que pasa por el origen de coordenadas y que su derivada es la función

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^x}. \text{ Encontrar la expresión de } f(x).$$

$f(x)$ será una primitiva de $f'(x)$ y además cumple que $f(0) = 0$.

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t(t+1)} = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln e^x - \ln(e^x + 1) = x - \ln(e^x + 1)$$

$$\text{cambio } e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$f(x) = x - \ln(e^x + 1) + c, \text{ pero } f(0) = 0 \Rightarrow 0 - \ln 2 + c = 0 \Rightarrow c = \ln 2 \Rightarrow f(x) = x - \ln(1 + e^x) + \ln 2$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las integrales:

$$a) \int \frac{\sin x}{5-2\cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2\sin x}{5-2\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln(5-2\cos x) + c$$

$$b) \int \frac{3x-8}{x^3+4x} dx = \int \frac{3x-8}{x(x^2+4)} = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+4} dx + 3 \int \frac{1}{4+x^2} dx \quad (*)$$

$$\frac{3x-8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+4} = \frac{Ax^2+4A+Mx^2+Nx}{x(x^2+4)} = \frac{(A+M)x^2+Nx+4A}{x(x^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} A+M=0 \Rightarrow M=2 \\ N=3 \\ 4A=-8 \Rightarrow A=-2 \end{cases}$$

$$(*) \int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1/2}{1+(x/2)^2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{3x-8}{x^3+4x} dx = -2 \ln|x| + \ln(x^2+4) + \frac{3}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$