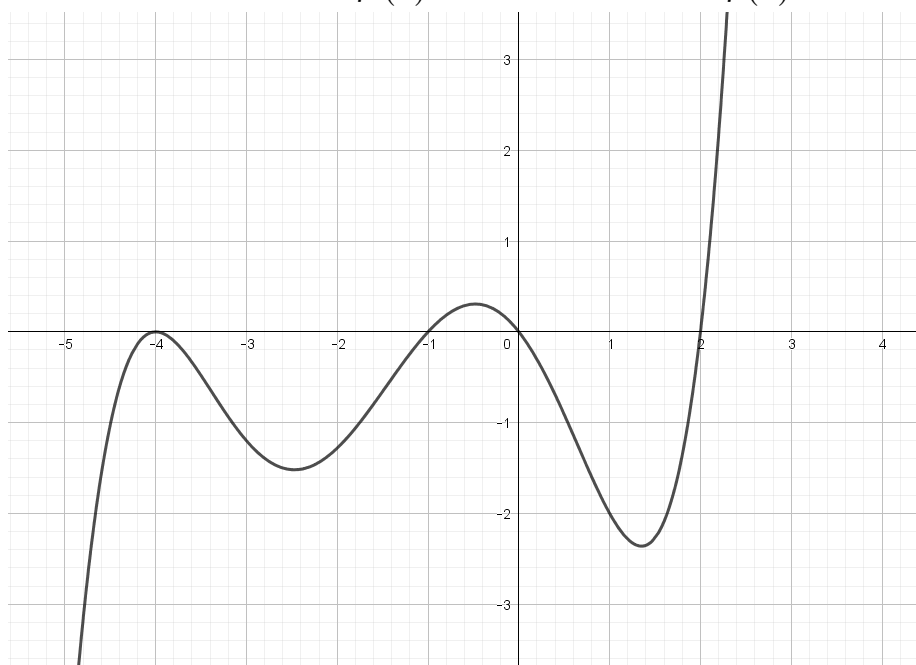


Instrucciones: Debes resolver cuatro ejercicios, a elegir entre los seis propuestos.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

La siguiente gráfica corresponde a la función $f'(x)$, derivada de la función $f(x)$.



Se pide:

- (0,5 puntos) Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- (0,5 puntos) Localiza los máximos o mínimos de la función $f(x)$.
- (0,75 puntos) Dónde están los cambios de curvatura de la función $f(x)$.
- (0,75 puntos) Encuentra algún punto en el que la recta tangente a $f(x)$ sea paralela a $2x + y = 5$.

Solución:

$f'(x) < 0$ en los intervalos $(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (0, 2) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (0, 2)$

$f'(x) > 0$ en los intervalos $(-1, 0) \cup (2, +\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$

$f'(x) = 0$ en los puntos $x = -4$, $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

Si nos fijamos en el crecimiento de la función, se deduce que en $x = -1$ y en $x = 2$, la función pasa de ser decreciente a ser creciente $\Rightarrow$ en $x = -1$ y en $x = 2$, $f(x)$ presenta mínimos relativos.

Del mismo modo, en $x = 0$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente $\Rightarrow$ en $x = 0$, $f(x)$ tiene un máximo relativo.

$f'(-4) = 0$, pero no hay un cambio en el crecimiento y $f''(-4) = 0 \Rightarrow$ en $x = -4$ hay un punto de inflexión (de silla) y $f(x)$ presenta un cambio de curvatura. Además $f''(x) = 0$ en $x = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{4}{3} \Rightarrow$ son puntos de inflexión en los que $f(x)$ cambia de curvatura.

La recta $2x + y = 5$ tiene pendiente $m = -2$ ($y = -2x + 5$), buscamos un punto en el que la recta tangente a $f(x)$ tenga pendiente -2 , es decir, un punto x_0 tal que $f'(x_0) = -2$. Observamos que $f'(1) = -2 \Rightarrow$ en $x = 1$, la recta tangente a $f(x)$ es paralela a $2x + y = 5$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Prueba que la ecuación $x^3 + \ln x = 5$ tiene una única solución real y encuéntrala con una cifra decimal exacta.

Solución:

Empezamos probando que la ecuación $x^3 + \ln x = 5$ no tiene más de una solución real. Para ello, suponemos que la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, x_1 y x_2 , con $0 < x_1 < x_2$ puesto que $\ln x$ no es real para $x \leq 0$.

Sea la función $f(x) = x^3 + \ln x - 5$, si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $x^3 + \ln x = 5 \Rightarrow f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 0$

$f(x)$ es una función continua y derivable en $(0, +\infty)$ por ser suma de funciones continuas y derivables en $(0, +\infty)$.

Entonces, $f(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$, es derivable en (x_1, x_2) y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ según el teorema de Rolle, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} \text{ y } f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 3x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \text{ pero } 0 < x_1 < c < x_2 \Rightarrow c \text{ no puede ser } -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow$$

no existe el punto intermedio garantizado por el teorema $\Rightarrow$ llegamos a una contradicción por suponer que la ecuación tenía dos soluciones.

Veamos que tiene una solución y la localizaremos con una cifra decimal exacta.

$f(x) = x^3 + \ln x - 5$ es continua en el intervalo $[1, e]$ y $\begin{cases} f(1) = -4 < 0 \\ f(e) = e^3 - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ según el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, e)$ tal que

$f(c) = 0 \Rightarrow c \in (1, e)$ es solución de la ecuación $x^3 + \ln x = 5$.

Ajustando el intervalo, tenemos $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} c \in (1, 2) ; \begin{cases} f(1'6) < 0 \\ f(1'7) > 0 \end{cases} c \in (1'6, 1'7) \Rightarrow c \approx 1'6$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{1+x^2}{1+|x|}$,

- (1 punto) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
- (1,5 puntos) Encuentra, si existen, asíntotas y extremos relativos de $f(x)$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x} & \text{si } x < 0 \rightarrow 1-x \neq 0 \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) \text{ es continua y derivable en } (-\infty, 0) \\ \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \rightarrow 1+x \neq 0 \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ es continua y derivable en } (0, +\infty) \end{cases}$$

Debemos estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$

$f(x)$ es continua en $x=0 \Leftrightarrow f(0)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$f(0)=1 \text{ y } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2}{1-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2}{1+x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ y } f(x) \text{ es continua en } x=0.$$

$f(x)$ es derivable en $x=0 \Leftrightarrow f'_-(0)=f'_+(0)$

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1+h^2}{1-h}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1+h^2-1+h}{1-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2+h}{h(1-h)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h+1}{1-h} = 1 \\ f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1+h^2}{1+h}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1+h^2-1-h}{1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2-h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-1}{1+h} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \text{ y } f(x) \text{ no es derivable en } x=0$$

Buscamos ahora las asíntotas de la función.

Como $1+|x| \neq 0 \Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas verticales ya que no existe $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b \rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$

como $f(x)$ tiene dos ramas, comprobamos la existencia de asíntotas cuando $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+x^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = -1 \end{aligned} \right. \Rightarrow y = -x - 1 \text{ es asíntota oblicua cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$\left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1 \end{aligned} \right. \Rightarrow y = x - 1 \text{ es asíntota oblicua cuando } x \rightarrow +\infty$$

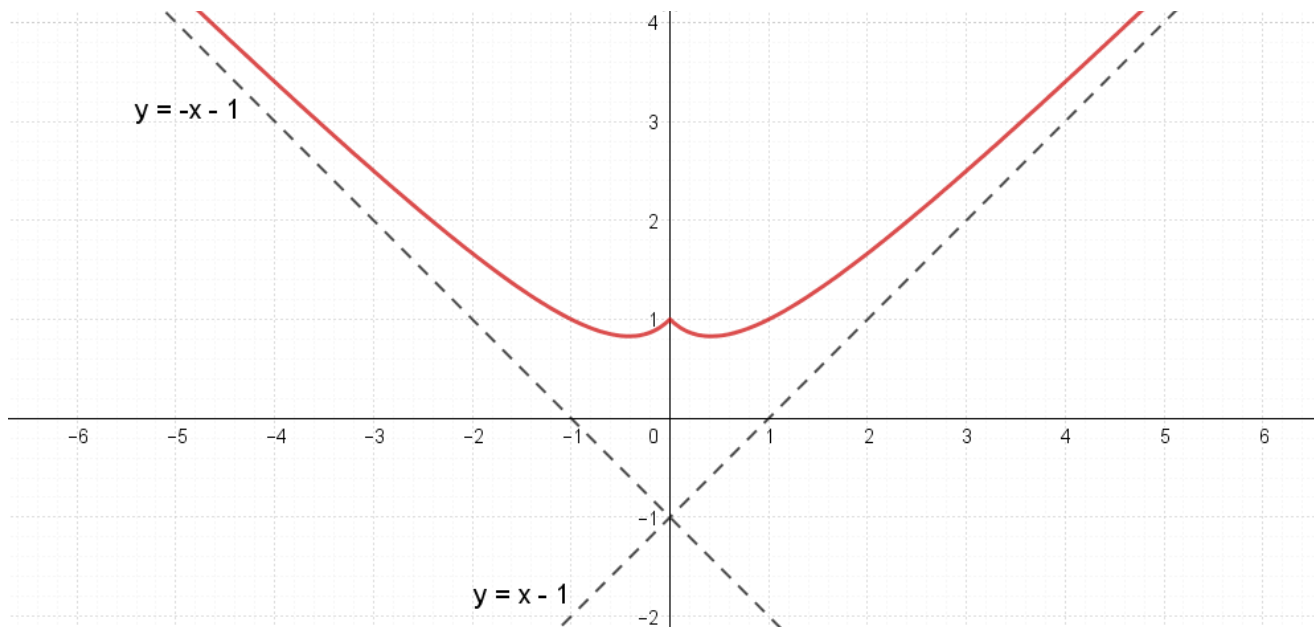
Nos falta buscar los extremos relativos:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1+2x-x^2}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{1+2x-x^2}{(1-x)^2} = 0 & (\text{si } x < 0) \rightarrow 1+2x-x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1+\sqrt{2} > 0 \\ x = 1-\sqrt{2} < 0 \end{cases} \\ \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2} = 0 & (\text{si } x > 0) \rightarrow x^2+2x-1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1+\sqrt{2} > 0 \\ x = -1-\sqrt{2} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(2-2x)(1-x)^2 - (1+2x-x^2)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} & \text{si } x < 0 \\ \frac{(2x+2)(1+x)^2 - (x^2+2x-1)2(1+x)}{(1+x)^4} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f''(1-\sqrt{2}) > 0 \\ f''(-1+\sqrt{2}) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{en } x = 1-\sqrt{2} \text{ y } x = -1+\sqrt{2}, f(x) \\ \text{tiene mínimos relativos.} \end{cases}$$

En $x=0$, $f(x)$ es continua, pero no es derivable.

Como $\begin{cases} f'_-(0)=1>0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente cuando } x \rightarrow 0^- \\ f'_+(0)=-1<0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente cuando } x \rightarrow 0^+ \end{cases} \rightarrow \text{en } x=0, f(x) \text{ tiene un máximo relativo.}$



Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, encuentra los valores de los parámetros a, b, c, d para que la función tenga un máximo relativo en el punto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y sea tangente a la recta $x - y = 1$ en $x = 0$.

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(x) \text{ tiene un máximo relativo en el punto } P\left(1, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} \rightarrow a + b + c + d = \frac{1}{2} \\ f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \text{ es tangente a } x - y = 1 \text{ en } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \rightarrow f'(0) = 1 \rightarrow c = 1 \\ \text{El punto de tangencia es } (0, -1) \rightarrow f(0) = -1 \rightarrow d = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = -1 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow a = -2 \text{ y } b = \frac{5}{2}$$

$$f(x) = -2x^3 + \frac{5x^2}{2} + x - 1; \text{ comprobamos que en } x=1 \text{ tiene un máximo: } \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(x) = -12x + 5 \rightarrow f''(1) = -7 < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2}$,

- (1 punto) Estudia la continuidad de $f(x)$.
- (1,5 puntos) Prueba que $f(x)$ alcanza el valor 3 en algún punto de su dominio.

Solución:

$f(x) = \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2} \rightarrow f(x)$ es cociente de funciones continuas $\rightarrow$ es continua salvo cuando $x^2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x \cdot \sin 2x}{2x} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \sin 2x \cdot \sin 2x + 8 \cos 2x \cdot \cos 2x}{2} = 4 \quad (\triangleq \text{ se aplica la regla del L'Hôpital})$$

$f(0)$ no existe y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 \Rightarrow$ en $x = 0$, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable.

Quiere decir que se podría definir $f(0) = 4$ y tendríamos que $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sería continua en todo $\mathbb{R}$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$.

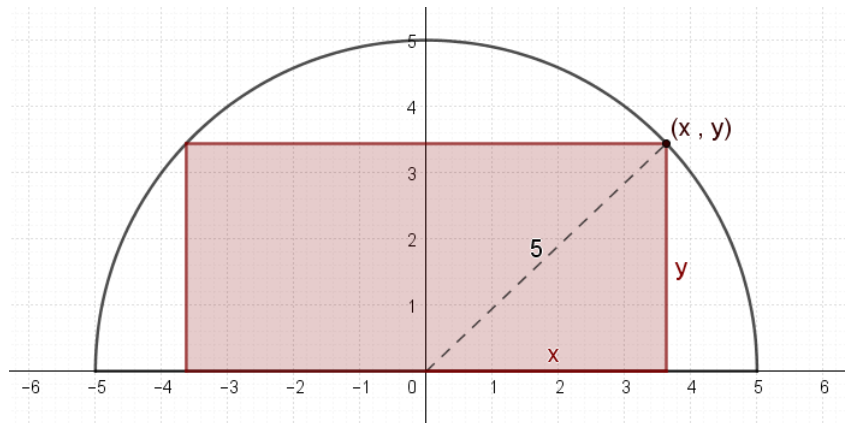
Entonces, $f(x)$ es continua en $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ y $f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3,68 > f(1) \approx 0,83 \Rightarrow$ el teorema de Darboux nos garantiza que $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f\left(\frac{1}{4}\right)$ y $f(1)$, al menos una vez, en el intervalo $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ y como $f\left(\frac{1}{4}\right) > 3 > f(1)$, existe $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ tal que $f(c) = 3$.

Ejercicio 6. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

- (1 punto) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.
- (1,5 puntos) Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en el semicírculo determinado por $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$.

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) &\xrightarrow{\text{indeterminación } \infty - \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \right) \xrightarrow{\text{indeterminación } \frac{0}{0}} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{(1+x)\ln(1+x)+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)+(1+x) \cdot \frac{1}{1+x} + 1} = \frac{1}{0+1+1} = \frac{1}{2} \quad (\triangleq \text{ se aplica la regla del L'Hôpital}) \end{aligned}$$



Tenemos el semicírculo de radio 5 y centro en $(0,0)$ $x^2 + y^2 = 25$ ($y \geq 0$)

Inscribimos un rectángulo de base $= 2x$, altura $= y \Rightarrow$ la función área será $A = 2xy$

x e y están relacionados por ser las coordenadas de un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$ ($y \geq 0$)

Ahora, el área es una función de x , $A(x) = 2x \cdot \sqrt{25 - x^2}$ de la que buscamos su máximo:

$$A'(x) = 2\sqrt{25 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} \rightarrow A'(x) = \frac{2(25 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}} \rightarrow A'(x) = \frac{50 - 4x^2}{\sqrt{25 - x^2}} ;$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow 50 - 4x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (x \text{ es una medida}) ; \text{ veamos que cuando } x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ el área es máxima.}$$

$$A''(x) = \frac{-8x \cdot \sqrt{25 - x^2} - (50 - 4x^2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}}{25 - x^2} \rightarrow A''\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-20\sqrt{2} \cdot \sqrt{25 - \frac{25}{2}} - 0}{25 - \frac{25}{2}} < 0 \rightarrow \text{si } x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ el área es máxima.}$$

$$\text{Las dimensiones del rectángulo son: } \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{2} \rightarrow \text{base} = 2x \rightarrow \text{base} = \sqrt{5} \\ y = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} \rightarrow \text{altura} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$