Instrucciones: Debes resolver cuatro ejercicios, a elegir entre los seis propuestos.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

(1,25 puntos) Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$, $u_1=(1,0,2,-1)$, $u_2=(-1,1,-2,2)$, $u_3=(2,2,0,-2)$, $u_4=(0,1,2,-2)$ y $u_5=(-2,-2,-1,1)$, prueba si el sistema $S=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ es un sistema de generadores para el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

(1,25 puntos) Determina los valores de m para que los vectores $e_1=(m,-1,0,2)$, $e_2=(0,m,-1,1)$ y $e_3=(1,0,-1,m)$ sean linealmente independientes.

Solución:

La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número de vectores que tiene cualquiera de sus bases, y también es el número mínimo vectores necesarios para generar el espacio y el máximo número de vectores linealmente independientes que podemos encontrar en ese espacio vectorial.
Para que el sistema $S=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ sea un sistema de generadores para $\mathbb{R}^4$, debe haber 4 vectores linealmente independientes, por tanto, la matriz que formamos con los vectores de S debe tener rango 4.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&0&-2\\0&1&2&1&-2\\2&-2&0&2&-1\\-1&2&-2&-2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\text{menor de orden }2:\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\ ;\quad \text{menor de orden }3:\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&2\\2&-2&0\end{vmatrix}=-4\neq 0\\[2ex] \text{menor de orden }4:\begin{vmatrix}1&-1&2&0\\0&1&2&1\\2&-2&0&2\\-1&2&-2&-2\end{vmatrix}_{\substack{F_3=F_3-2F_1\\F_4=F_4+F_1}}=\begin{vmatrix}1&-1&2&0\\0&1&2&1\\0&0&-4&2\\0&1&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-4&2\\1&0&-2\end{vmatrix}=16\neq 0\end{cases}$$

Como hemos encontrado un menor de orden 4 distinto de cero $\Rightarrow$ $Rang\ A=4$ $\Rightarrow$ Hay 4 vectores linealmente independientes, u_1, u_2, u_3 y u_4 y $B=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ $S=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^4$.

e_1, e_2 y e_3 serán linealmente independientes cuando el rango de la matriz que podemos formar con ellos, sea 3.

$$A=\begin{pmatrix}m&0&1\\-1&m&0\\0&-1&-1\\2&1&m\end{pmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{Menor de orden 2 }\begin{vmatrix}0&-1\\2&1\end{vmatrix}=2\neq 0\\[2ex]\text{Menores de orden 3: }\begin{vmatrix}m&0&1\\0&-1&-1\\2&1&m\end{vmatrix}=-m^2+m+2\ \ y\ \ \begin{vmatrix}-1&m&0\\0&-1&-1\\2&1&m\end{vmatrix}=-m-1\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}-m-1=0\Rightarrow m=-1\\-m^2+m+2=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\m=2\end{cases}\end{cases}$$

Los posibles menores de orden 3 son nulos cuando $m=-1$ $\Rightarrow\begin{cases}si\ m=-1,\ Rang\ A=2\\si\ m\neq -1,\ Rang\ A=3\end{cases}$

Si $m\neq -1$, e_1, e_2 y e_3 son linealmente independientes

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -4\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

encuentra X tal que $A^T\cdot X\cdot B+C=D$

Solución:

Hay que resolver la ecuación $A^T\cdot X\cdot B+C=D$

$$A^T\cdot X\cdot B+C=D \Rightarrow A^T\cdot X\cdot B=D-C \Rightarrow \underbrace{\left(A^T\right)^{-1}\cdot A^T}_{I_2}\cdot X\cdot \underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I_3}=\left(A^T\right)^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1} \Rightarrow X=\left(A^T\right)^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \to |A|=-2 \to Adj(A)=\begin{pmatrix}A_{11}=2 & A_{12}=0\\ A_{21}=-1 & A_{22}=-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \to |B|=-1 \to Adj\left(B^T\right)=\begin{pmatrix} B_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3 & B_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 & B_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\\ B_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1 & B_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 & B_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\\ B_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2 & B_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 & B_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=\left(A^T\right)^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -4\end{pmatrix}\right]\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 6 & 0 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea el sistema de ecuaciones lineales, dependientes del parámetro real m, $\begin{cases}(m+2)x+y+z=m-1\\ mx+(m-1)y+z=m-1\\ (m+1)x+(m+1)z=m-1\end{cases}$

- (1,5 puntos) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro m.
- (1 punto) Resuelve el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

La matriz asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$ *; estudiemos su rango según los valores de m.*

$$|A|=\begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}_{C_1=C_1-C_3}=\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ m-1 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m+1 \end{vmatrix}=(m+1)\cdot\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ m-1 & m-1 \end{vmatrix}_{C_1=C_1-C_2}=(m+1)\begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & m-1 \end{vmatrix}=(m+1)m(m-1)$$

$$|A|=m(m+1)(m-1) \;\rightarrow\; |A|=0 \;\Rightarrow\; m(m+1)(m-1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m=0 \\ m=-1 \\ m=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; si\ m\neq 0,\ m\neq -1\ y\ m\neq 1,\ Rang\ A=3$$

$$Si\ m=0 \;\Rightarrow\; Rang\ A<3\ \ y\ \ \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ A=2 \\ como\ C_4=-C_3 \;\Rightarrow\; Rang\ \bar{A}=2 \end{cases}$$

$$Si\ m=-1 \;\Rightarrow\; Rang\ A<3\ \ y\ \ \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ A=2 \\ menor\ de\ orden\ 3: \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ \bar{A}=3 \end{cases}$$

$$Si\ m=1 \;\Rightarrow\; Rang\ A<3\ \ y\ \ \bar{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ A=2 \\ como\ la\ C_4\ es\ nula \;\Rightarrow\; Rang\ \bar{A}=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} si\ m\neq 0,\ m\neq -1\ y\ m\neq 1,\ Rang\ A=3=Rang\ \bar{A}=n^o\ incógnitas \Rightarrow sistema\ compatible\ determinado. \\ si\ m=0\ ,\ Rang\ A=2=Rang\ \bar{A}<n^o\ incógnitas \;\Rightarrow\; sistema\ compatible\ indeterminado. \\ si\ m=1\ ,\ Rang\ A=2=Rang\ \bar{A}<n^o\ incógnitas \;\Rightarrow\; sistema\ compatible\ indeterminado. \\ si\ m=-1\ ,\ Rang\ A=2\neq Rang\ \bar{A}=3 \;\Rightarrow\; sistema\ incompatible. \end{cases}$$

Resolvemos para $m\neq 0,\ m\neq -1\ y\ m\neq 1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m-1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{m(m+1)(m-1)}=\frac{(m-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{m(m+1)(m-1)}=\frac{(m-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}}{m(m+1)(m-1)}=\frac{m(m-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}}{m(m+1)(m-1)}=\frac{m(m-1)(m-2)}{m(m+1)(m-1)}=\frac{m-2}{m+1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ m+1 & m-1 & m+1 \end{vmatrix}}{m(m+1)(m-1)}=\frac{2m(m-1)}{m(m+1)(m-1)}=\frac{2}{m+1} \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} m+2 & 1 & m-1 \\ m & m-1 & m-1 \\ m+1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}}{m(m+1)(m-1)}=\frac{m(m-1)}{m(m+1)(m-1)}=\frac{1}{m+1}$$

Resolvemos para $m=0$

$$\begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ -y+z=-1 \\ x+z=-1 \end{cases} \;\rightarrow\; menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \cancel{2x+y+z=-1} \\ -y=-1-z \\ x=-1-z \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$Resolvemos\ \ para\ \ m=1$

$$\begin{cases}3x+y+z=0\\x+z=0\\x+z=0\end{cases} \rightarrow\ menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow \begin{cases}3x+y=-z\\x=-z\\\cancel{x+z=0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\lambda\\y=2\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$, $M_1=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$ y $M_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Comprueba si A pertenece al subespacio vectorial generado por $\{M_1\ ,\ M_2\}$.
- (0,5 puntos) Encuentra dos matrices que pertenezcan al subespacio vectorial generado por $\{M_1\ ,\ M_2\}$
- (1 punto) Calcula A^n.

Solución:

$A\ pertenece\ al\ subespacio\ vectorial\ generado\ por\ M_1\ y\ M_2 \Leftrightarrow A=\alpha_1\cdot M_1+\alpha_2\cdot M_2\ \ ,\ con\ \alpha_1, \alpha_2\in\mathbb{R}$

$$\alpha_1\cdot M_1+\alpha_2\cdot M_2=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha_1&-\alpha_1\\0&\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\alpha_2\\0&\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha_1&-\alpha_1+2\alpha_2\\0&\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}2\alpha_1&-\alpha_1+2\alpha_2\\0&\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\alpha_1=a\\-\alpha_1+2\alpha_2=1\\\alpha_1+\alpha_2=a\end{cases}, veamos\ cuando\ tiene\ solución\ el\ sistema: \begin{pmatrix}2&0&a\\-1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\begin{vmatrix}2&0\\-1&2\end{vmatrix}\neq 0\ ;\ \begin{vmatrix}2&0&a\\-1&2&1\\1&1&a\end{vmatrix}=a-2\\si\ \ a=2,\ S.C.D.\ \ ;\ \ si\ \ a\neq 2\ ,\ S.I.\end{cases}$$

$Si\ \ a=2\Rightarrow A\ \ pertenece\ al\ subespacio\ \ porque\ \ A=M_1+M_2\ ;\ pero\ si\ a\neq 2\Rightarrow A\ no\ \ pertenece\ al\ subespacio.$

$Buscamos\ dos\ matrices\ que\ \ pertenezcan\ al\ subespacio\ vectorial\ \ generado\ \ por\ M_1\ \ y\ M_2.\ Por\ ejemplo:$

$$A_1=M_1-M_2=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\0&0\end{pmatrix}\ \ y\ \ A_2=3M_1+M_2=\begin{pmatrix}6&-3\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-1\\0&4\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\ ;\ A^2=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{pmatrix}\ ;\ A^3=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{pmatrix}\ ;\ A^4=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4&4a^3\\0&a^4\end{pmatrix}$$

$$Entonces\ \ A^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea el sistema de ecuaciones lineales, dependientes del parámetro real a, $\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x-y+z=-a \\ x-y+az=-a \end{cases}$.

- (1,25 puntos) Discute el sistema según los valores de a.
- (1,25 punto) Resuélvelo en los casos de compatibilidad.

Solución:

La matriz ampliada del sistema es $\bar{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & a & -a \end{pmatrix}$, *estudiemos su rango:*

$$|\bar{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & a & -a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{vmatrix}_{F_4=F_4-F_3}=a\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{vmatrix}=-a(a-1)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2+F_3}}=-a(a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=a(a-1)^2(a+1) \;\Rightarrow\; |\bar{A}|=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=-1 \end{cases} \;\Rightarrow\; si\ a\neq 0,\ a\neq 1\ y\ a\neq -1,\ Rang\ \bar{A}=4>Rang\ A \Rightarrow\ Sistema\ incompatible.$$

$$Si\ a=0 \;\Rightarrow\; \bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; como \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0\ ;\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ A=Rang\ \bar{A}=3=n^o\ incógnitas.$$

Sistema compatible determinado $\rightarrow$ *sistema homogéneo* $\rightarrow$ *solución:* $\{x=0,\ y=0,\ z=0\}$

$$Si\ a=1 \;\Rightarrow\; \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; C_1=C_3\ y\ C_2=C_4 \;\Rightarrow\; Rang\ A=Rang\ \bar{A}=2<n^o\ de\ incógnitas.$$

$$Sistema\ compatible\ indeterminado;\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x+y=1-z \\ x-y=-1-z \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-z \\ y=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; solución: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$Si\ a=-1 \;\Rightarrow\; \bar{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} C_2=-C_1 \;\rightarrow\; Rang\ A=2 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ \bar{A}=3 \end{cases} \;\Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

Ejercicio 6. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea $A \in M_{2\times2}$ tal que $A^2 = A$ ($A \neq I$ y $A \neq 0$). Si $B = 2A - I$, se pide:

- (1 punto) Encuentra la forma general de las matrices A.
- (1 punto) Calcula la matriz B^{2020} y $|B|$.
- (0,5 puntos) Prueba si existen las matrices A^{-1} y B^{-1}.

Solución:

$$A \in M_{2\times2} \;;\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; y \; A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc = a \rightarrow si\; b \neq 0 \rightarrow c = \dfrac{a-a^2}{b} \;;\; si\; b = 0 \rightarrow a^2 = a \; y \; a = 0 \; o \; a = 1 \\ ab+bd = b \rightarrow b(a+d) = b \rightarrow b = 0 \; o \; a+d = 1 \rightarrow d = 1-a \\ ac+cd = c \rightarrow c(a+d) = c \rightarrow c = 0 \; o \; a+d = 1 \rightarrow d = 1-a \\ d^2+bc = d \end{cases}$$

$$Como\; A \neq I \; y \; A \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} si\; b = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \; o \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ si\; b \neq 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$B = 2A - I \; y \; A^2 = A \rightarrow B^2 = (2A-I)^2 = (2A-I)(2A-I) = 4A^2 - 2A\cdot I - I\cdot 2A + I^2 = 4A^2 - 4A + I = 4A - 4A + I = I$$

$$B^2 = I \;;\; B^3 = B \;;\; B^4 = B^2 = I \Rightarrow B^{2020} = I$$

$$Como\; B^2 = I \Rightarrow |B^2| = |I| \Rightarrow |B\cdot B| = 1 \Rightarrow |B|\cdot|B| = 1 \Rightarrow |B| = 1 \; o \; |B| = -1$$

$$\left.\begin{aligned} &Si\; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \; o \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \\ &Si\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a(1-a) - b\cdot\dfrac{a-a^2}{b} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{-1} \; no \; existe.$$

$$B^2 = I \Rightarrow B\cdot B = I \Rightarrow B^{-1} = B$$