Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 4ax+4ay+2z=2a \\ ax+y-az=a \\ 4ax+4ay+az=4 \end{cases}$, se pide:

- (1,25 puntos) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real a.
- (0,75 puntos) Resuélvase el sistema en el caso $a=-1$.
- (0,5 puntos) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$\begin{cases} 4ax+4ay+2z=2a \\ ax+y-az=a \\ 4ax+4ay+az=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{equivalente al sistema}} \begin{cases} 2ax+2ay+z=a \\ ax+y-az=a \\ 4ax+4ay+az=4 \end{cases}$$

$$La\ matriz\ asociada\ al\ sistema\ es\ A=\begin{pmatrix} 2a & 2a & 1 \\ a & 1 & -a \\ 4a & 4a & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2a & 2a & 1 \\ a & 1 & -a \\ 4a & 4a & a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 4 & 4a & a \end{vmatrix}=a\left(-2a^2+6a-4\right)$$

$$|A|=0 \Rightarrow a\left(-2a^2+6a-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^2-3a+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow si\ a\neq 0,\ a\neq 1\ y\ a\neq 2 \Rightarrow Rang\ A=3$$

$Si\ a=0$

$$La\ matriz\ ampliada\ es\ \bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};\ \left| \begin{array}{l} en\ A\ encontramos\ el\ menor\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow Rang(A)=2 \\ en\ \bar{A}\ tenemos\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow Rang(\bar{A})=3 \end{array} \right.$$

$Si\ a=1$

$$La\ matriz\ ampliada\ es\ \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ \left| \begin{array}{l} en\ A\ encontramos\ el\ menor\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow Rang(A)=2 \\ en\ \bar{A}\ tenemos\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \Rightarrow Rang(\bar{A})=3 \end{array} \right.$$

$Si\ a=2$

$$La\ matriz\ ampliada\ es\ \bar{A}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 8 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix};\ \left| \begin{array}{l} en\ A\ encontramos\ el\ menor\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow Rang(A)=2 \\ en\ \bar{A}\ tenemos\ F_3=2F_1 \Rightarrow Rang(\bar{A})=2 \end{array} \right.$$

Discusión:

Si $a \neq 0,\ a \neq 1\ y\ a \neq 2$, $Rang(A) = 3 = Rang(\bar{A}) = n^o$ *de incógnitas* $\Rightarrow$ *Sistema compatible determinado*

Si $a = 0\ o\ a = 1$, $Rang(A) = 2 < Rang(\bar{A}) = 3$ $\Rightarrow$ *Sistema incompatible*

Si $a = 2$, $Rang(A) = 2 = Rang(\bar{A})$ $\Rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)*

Resolvemos para $a = -1$

$$\begin{cases} -2x - 2y + z = -1 \\ -x + y + z = -1 \\ -4x - 4y - z = 4 \end{cases} \ ; \quad |A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 12 \ ; \quad \text{solución única} \Rightarrow \text{resolvemos por la regla de Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-9}{12} = -\frac{3}{4} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-24}{12} = -2$$

Resolvemos para $a = 2$

El menor de orden 2 distinto de cero era $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ *esto nos indica que debemos quedarnos con las dos primeras ecuaciones y considerar la incógnita x como parámetro:*

$$\begin{cases} 4x + 4y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ \cancel{8x + 8y + 2z = 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + z = 2 - 4x \\ y - 2z = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6 - 10x}{9} \\ z = \dfrac{-6 + 4x}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{solución:} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \dfrac{6 - 10\lambda}{9} \\ z = \dfrac{-6 + 4\lambda}{9} \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & x & x+2 & 2x+1 \\ 1 & x^2 & 2x+1 & x^2+2x \\ 1 & x^3 & 3x & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & x & x+2 & 2x+1 \\ 1 & x^2 & 2x+1 & x^2+2x \\ 1 & x^3 & 3x & 3x^2 \end{vmatrix}_{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & x-1 & x-1 & 2x-2 \\ 0 & x^2-1 & 2x-2 & x^2+2x-3 \\ 0 & x^3-1 & 3x-3 & 3x^2-3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & 2(x-1) \\ (x-1)(x+1) & 2(x-1) & (x-1)(x+3) \\ (x-1)(x^2+x+1) & 3(x-1) & 3(x-1)(x+1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ (x+1) & 2 & (x+3) \\ (x^2+x+1) & 3 & 3(x+1) \end{vmatrix}_{\substack{C_1 = C_1 - C_2 \\ C_3 = C_3 - 2C_2}} = (x-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 2 & x-1 \\ x^2+x-2 & 3 & 3x-3 \end{vmatrix} = (x-1)^3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ (x-1)(x+2) & 3(x-1) \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+2 & 3 \end{vmatrix} = -(x-1)^5 \cdot (1-x) = (x-1)^6 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$,

- (0,5 puntos) Determina los valores de a para los que la matriz A admite inversa.
- (1,25 punto) Calcula la matriz A^{-1} en función del parámetro a.
- (0,75 puntos) Para $a=2$, resuelve el sistema $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

Solución:

A tiene inversa $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=a \quad \Rightarrow \quad \textit{Si } a\neq 0\text{, } \textit{la matriz } A \textit{ tiene inversa.}$$

Ahora calculemos A^{-1} *para* $a\neq 0$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & a\end{vmatrix}=a \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=1-a^2 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}\ ,\ |A|=a \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{vmatrix}=0 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{vmatrix}=a \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}a & 1-a^2 & -1\\ 0 & a & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1-a^2}{a} & -\frac{1}{a}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ *para* $a=2 \Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x=-\frac{5}{2}\\ y=1\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dadas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Encuentra todas las matrices A que satisfacen $A^2 = A-I$. Siendo $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (0,75 puntos) Calcula la matriz $\left(A^5\right)^{-1}$.
- (0,75 puntos) Halla la matriz A^{28}.

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \text{ verifica que } A^2 = A-I$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A-I=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+ab=1 \\ 2a+ac=a \\ 2b+bc=b \\ ab+c^2=c-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=-3 \Rightarrow b=-\dfrac{3}{a} \\ a(2+c)=a \Rightarrow 2+c=1 \Rightarrow c=-1 \\ b(2+c)=b \Rightarrow 2+c=1 \Rightarrow c=-1 \\ ab+c^2=c-1 \Rightarrow -3+(-1)^2=-1-1 \end{cases}$$

$$\text{Entonces, las matrices pedidas son de la forma } A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -\dfrac{3}{a} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ahora calculemos } \left(A^5\right)^{-1}. \quad A^2=A-I \quad ; \quad A^3=A\cdot(A-I)=A^2-A=A-I-A=-I$$

$$\text{Como } A^3=-I \Rightarrow A^6=I \Rightarrow A\cdot A^5=I \Rightarrow A \text{ es la matriz inversa de } A^5 \Rightarrow \left(A^5\right)^{-1}=A \quad ; \quad \left(A^5\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -\dfrac{3}{a} & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{28}=A^{24}\cdot A^4=\left(A^6\right)^4\cdot A^4=I^4\cdot A^4=A^4=A^3\cdot A=-I\cdot A=-A \quad ; \quad A^{28}=-A \quad \Rightarrow \quad A^{28}=\begin{pmatrix} -2 & -a \\ \dfrac{3}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

– (1,25 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m .
– (1,25 puntos) Resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

Como el sistema tiene 4 ecuaciones y 3 incógnitas, empezamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\bar{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ m-1 & 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix}_{C_4=C_4+C_1+C_2+C_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m+3 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ m-1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1)^3 (m+3) \quad ; \quad |\bar{A}| = 0 \Rightarrow (m-1)^3 (m+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \Rightarrow si\ m \neq 1\ y\ m \neq -3\ ,\ Rang\ \bar{A} = 4$$

Si $m = 1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,\ todas\ las\ filas\ son\ iguales \Rightarrow Rang\ A = Rang\ \bar{A} = 1$$

Si $m = -3$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |\bar{A}| = 0 \Rightarrow Rang\ \bar{A} < 4 \\ en\ A\ encontramos\ el\ menor \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow Rang\ A = 3 \end{array} \right.$$

Discusión:

$Si\ \ m \neq 1\ \ y\ \ m \neq -3\ ,\ \ Rang(A) = 3 < Rang(\bar{A}) = 4 \Rightarrow Sistema\ incompatible$

$Si\ \ m = 1\ ,\ \ Rang(A) = 1 = Rang(\bar{A}) \Rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado\ (infinitas\ soluciones)$

$Si\ \ m = -3\ ,\ \ Rang(A) = 3 = Rang(\bar{A}) = n^o\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ compatible\ determinado$

Resolvemos para $m = 1$

$$Todas\ las\ ecuaciones\ son\ iguales \Rightarrow el\ sistema\ se\ reduce\ a: \quad x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Resolvemos para $m=-3$

En A teníamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow$ *las tres primeras ecuaciones son linealmente independientes y podemos prescindir de la cuarta por ser combinación lineal de las otras tres.*

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ x+y-3z=1 \\ x-3y+z=1 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{y aplicamos la regla de Cramer.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{-16} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{-16} = -1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{-16} = -1$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

- (0,75 puntos) Encuentra los valores de a para que los vectores, $e_1=(-a,a,0)$, $e_2=(0,a-1,a)$, $e_3=(a,0,a+2)$ sean una base de $\mathbb{R}^3$.
- (0,75 puntos) Para uno de esos valores de a, calcula las coordenadas del vector $v=(1,-2,3)$ en la base formada por $\{e_1, e_2, e_3\}$
- (1 punto) Para algún valor de $a \neq 0$, busca una relación de dependencia lineal entre los vectores e_1, e_2, e_3.

Solución:

Para que tres vectores formen una base de $\mathbb{R}^3$, *basta con que sean linealmente independientes puesto que, si en un espacio vectorial tenemos el mismo número de vectores linealmente independientes que la dimensión del espacio, automáticamente son base.*

Veamos para qué valores de a, los vectores e_1, e_2 *y* e_3, *son linealmente independientes.*

$e_1=(-a,a,0)$, $e_2=(0,a-1,a)$, $e_3=(a,0,a+2)$

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix}_{F_2=F_2+F_1} = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} a-1 & a \\ a & a+2 \end{vmatrix} = -a \cdot \left[(a-1)(a+2)-a^2\right] = -a(a-2)$$

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow$$

e_1, e_2 *y* e_3 *forman base de* $\mathbb{R}^3$ *para todo valor de a tal que* $a \neq 0$ *y* $a \neq 2$.

Supongamos ahora que $a=-1 \Rightarrow e_1=(1,-1,0)$, $e_2=(0,-2,-1)$, $e_3=(-1,0,1)$

$v=(1,-2,3)$ *es un vector de* $\mathbb{R}^3$ *cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica.*

En la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ *tendrá coordenadas* $v=(x,y,z) \Rightarrow v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$

$(1,-2,3) = x\cdot(1,-1,0) + y\cdot(0,-2,-1) + z\cdot(-1,0,1) \Rightarrow (1,-2,3) = (x,-x,0)+(0,-2y,-y)+(-z,0,z) \Rightarrow$

$$(1,-2,3)=(x-z,-x-2y,-y+z) \Rightarrow \begin{cases} x-z=1 \\ -x-2y=-2 \\ -y+z=3 \end{cases} \xrightarrow{1^a+2^a} \begin{cases} x-y=4 \\ -x-2y=-2 \end{cases} \xrightarrow{1^a+2^a} -3y=2 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}$$

$$x=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3} \quad ; \quad z=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad v=\left(\frac{10}{3},-\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right) \text{ en la base } \{e_1, e_2, e_3\}.$$

Para que e_1, e_2, e_3 sean linealmente dependientes, $a=0$ o $a=2$. Como $a\neq 0$, entonces debe ser $a=2$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $e_1=(-2,2,0)$, $e_2=(0,1,2)$, $e_3=(2,0,4)$ y la combinación lineal $\lambda_1\cdot e_1+\lambda_2\cdot e_2+\lambda_3\cdot e_3=0$ tendrá valores de λ_i no todos cero.
Como e_2 y e_3 son linealmente independientes al no ser proporcionales $\Rightarrow$ e_1 se podrá poner como combinación lineal de ellos $\Rightarrow$ $e_1=\lambda\cdot e_2+\mu\cdot e_3$ $\Rightarrow$ $(-2,2,0)=\lambda\cdot(0,1,2)+\mu\cdot(2,0,4)$

$$(-2,2,0)=(2\mu\,,\,\lambda\,,\,2\lambda+4\mu) \Rightarrow \begin{cases} 2\mu=-2 \rightarrow \mu=-1 \\ \lambda=2 \\ 2\lambda+4\mu=0 \rightarrow 2\cdot 2+4\cdot(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow e_1=2e_2-e_3 \Rightarrow e_1-2e_2+e_3=0$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Discute y resuelve según los valores del parámetro real λ el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} (\lambda-4)x+y+2z=0 \\ -3x+\lambda y+2z=0 \\ -5x+y+(\lambda+3)z=0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} (\lambda-4)x+y+2z=0 \\ -3x+\lambda y+2z=0 \\ -5x+y+(\lambda+3)z=0 \end{cases}$$; *Es un sistema homogéneo y en todos los casos será compatible.*

Rang A = Rang $\bar{A}$ puesto que $\bar{A}=\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 0 \\ & 0 \end{array}\right)$ *y la última columna siempre será linealmente dependiente del resto.*

la matriz asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} \lambda-4 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda & 2 \\ -5 & 1 & \lambda+3 \end{pmatrix}$; $|A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda & 2 \\ -5 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$

$$|A|=0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -1$, Rang$(A)=3=$ Rang$(\bar{A})=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
En estos casos, como $\{x=0,\ y=0,\ z=0\}$ es solución y debe ser única, ya está resuelto.

Si $\lambda=1$ $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *y Rang $A=2$ puesto que* $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ $\Rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado.*

Nos quedamos con las ecuaciones 2^a y 3^a $\begin{cases} -3x+y+2z=0 \\ -5x+y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y=-2z \\ -5x+y=-4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases} \Rightarrow$ *solución:* $\begin{cases} x=\mu \\ y=\mu \\ z=\mu \end{cases}$

Si $\lambda=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 2\\ -3 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix}$ *y Rang* $A=2$ *puesto que* $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado.*

Nos quedamos con las ecuaciones 2^a *y* 3^a $\begin{cases}-3x-y+2z=0\\ -5x+y+2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-y+2z=3x\\ \;\;y+2z=5x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x\\ z=2x\end{cases} \Rightarrow$ *solución*: $\begin{cases}x=\mu\\ y=\mu\\ z=2\mu\end{cases}$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

encuentra una matriz X tal que $A\cdot X\cdot A^T=B$

<u>*Solución:*</u>

$$X\in M_{3\times 3} \;;\; como \;\; A\cdot X\cdot A^T=B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A^T\cdot\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^T\right)^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^T\right)^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=-1 \;;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 \Rightarrow$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Podemos calcular $\left(A^T\right)^{-1}$ *como la inversa de la matriz* $A^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ *o mejor así*: $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$