Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x)=2x|4-x|$

a. Estudiar su continuidad y derivabilidad.
b. Dibujar su gráfica.
c. Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y=f(x)$, las rectas $x=0$, $x=5$ y el eje OX.

$$f(x)=\begin{cases}2x(4-x) & si\ \ x\le 4\\ 2x(x-4) & si\ \ x>4\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}8x-2x^2 & si\ \ x\le 4\\ 2x^2-8x & si\ \ x>4\end{cases}$$

Las dos ramas de la función son parábolas, con lo que sabemos que son continuas y derivables en todos los puntos salvo quizás en x=4. Estudiemos, en ese punto, la continuidad y derivabilidad de la función.

$$f(4)=0\ ;\quad \lim_{x\to 4} f(x)=\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(8x-2x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(2x^2-8x\right)=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad f(4)=\lim_{x\to 4} f(x) \quad\Rightarrow\quad f(x)\ es$$

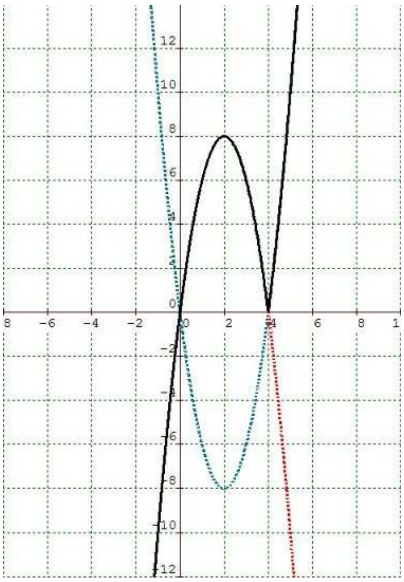
$$continua\ en\ x=4 \quad\Rightarrow\quad f(x)\ es\ continua\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$f'_-(4)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{8(4+h)-2(4+h)^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(-2h-8)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-2h-8)=-8$$

$$f'_+(4)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(4+h)^2-8(4+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(2h+8)}{h}=\lim_{h\to 0^+}(2h+8)=8$$

$$f'_-(4)\ne f'_+(4) \quad\Rightarrow\quad f(x)\ \ no\ es\ derivable\ en\ x=4$$

Vamos a representar gráficamente la función teniendo en cuenta que está compuesta por dos trozos de parábolas.



$y=8x-2x^2$ *corta al eje OX en los puntos* $(0,0)$ *y* $(4,0)$

$y'=8-4x \Rightarrow$ *tiene un máximo en el punto* $(2,8)$

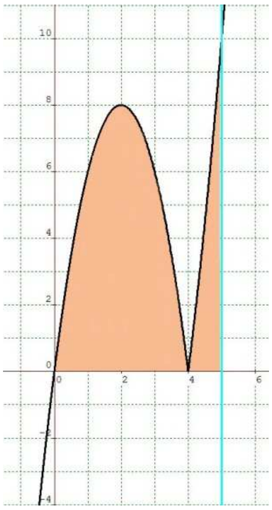
la gráfica se correspondería con la parábola de trazo rojo

$y=2x^2-8x$ *corta al eje OX en los mismos puntos* $(0,0)$ *y* $(4,0)$

$y'=4x-8 \Rightarrow$ *tiene un mínimo en el punto* $(2,-8)$

la gráfica se correspondería con la parábola de trazo azul

La gráfica de $f(x)$ *la representamos en negro y se obtiene a partir de la primera parábola en el intervalo* $(-\infty,4]$ *y de la segunda en* $(4,+\infty)$



El área pedida se corresponde con la zona coloreada

$$A=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx+\int_4^5\left(2x^2-8x\right)dx=\left[4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4+\left[\frac{2x^3}{3}-4x^2\right]_4^5=$$

$$=\left[\left(64-\frac{128}{3}\right)-0\right]+\left[\left(\frac{250}{3}-100\right)-\left(\frac{128}{3}-64\right)\right]=26$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula:

$a)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{sen\,x\left(1-sen\,x\right)}{\left(\cos x\right)^2}$ $\qquad b)\ \int x\cdot\left(\ln x\right)^2 dx$ $\qquad c)\ \int\dfrac{1}{x^3+2x}dx$

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x\left(1-sen\,x\right)}{\left(\cos x\right)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x-sen^2x}{\left(\cos x\right)^2}=\left(L'Hôpital\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-2sen\,x\cos x}{-2\cos x\,sen\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-2sen\,x}{-2sen\,x}=\frac{1}{2}$$

$$b)\ \int x\left(\ln x\right)^2dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int\frac{x^2}{2}\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int x\cdot\ln x\cdot dx=$$

$$\left\{\begin{array}{l}u=\left(\ln x\right)^2\ \Rightarrow\ du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx\\ dv=xdx\ \Rightarrow\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}\qquad\qquad\left\{\begin{array}{l}u=\ln x\ \Rightarrow\ du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=xdx\ \Rightarrow\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}$$

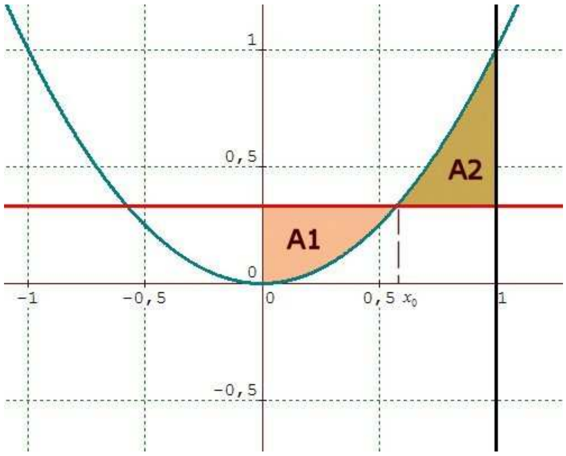
$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right]=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C$$

$$c)\ \int\frac{1}{x^3+2x}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x}dx-\int\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2\right)+C$$

$$\frac{1}{x^3+2x}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+2}=\frac{(A+M)x^2+Nx+2A}{x\left(x^2+2\right)}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A+M=0\\N=0\\2A=1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\dfrac{1}{2}\ ,\ M=-\dfrac{1}{2}\\N=0\end{array}\right.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde a es un número real con $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.



Se trata de encontrar el valor de "a" para que $A_1 = A_2$

$$A_1 = \int_0^{x_0} (a - x^2)\, dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} = ax_0 - \frac{x_0^3}{3}$$

$$A_2 = \int_{x_0}^{1} (x^2 - a)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax \right]_{x_0}^{1} = \frac{1}{3} - a - \left(\frac{x_0^3}{3} - ax_0 \right)$$

entonces $$ax_0 - \frac{x_0^3}{3} = \frac{1}{3} - a - \frac{x_0^3}{3} + ax_0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

Se define la función $g(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} f(t)\, dt$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$

$$g(x) = \int_0^{senx} f(t)\, dt \Rightarrow g(0) = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$$

según el teorema fundamental del cálculo integral $g'(x) = \dfrac{1}{1+e^{senx}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{1+e^{senx}}$

entonces $$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \underbrace{(L'\ Hôpital)}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+e^{senx}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(x)=x^2 sen(x-4)+17$. Demuestra que la función derivada $f'(x)$ posee al menos una raíz real en el intervalo $(0\ ,\ 4)$.

$f(x)$ es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser suma y producto de funciones continuas y derivables; en particular $f(x)$ es continua en $[0,4]$ y derivable en $(0,4)$ y además $f(0)=f(4)$

$f(0)=0^2\cdot sen(0-4)+17=17$

$f(4)=16\cdot sen(0)+17=17$

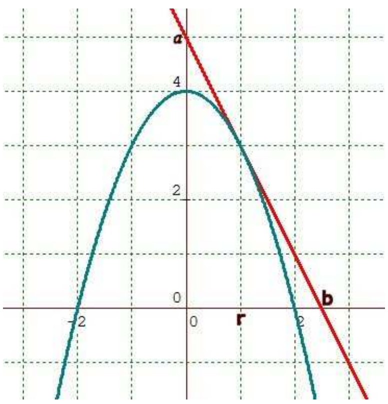
entonces estamos en las condiciones del teorema de Rolle por lo que podemos concluir que existe $x_0\in(0,4)$ tal que $f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x)$ posee, al menos, una raiz en el intervalo $(0,4)$.

También puede resolverse aplicando el th. de Bolzano a $f'(x)$ en el intervalo $[0,4]$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la parábola $y=4-x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x=r$, con $r>0$.

a. Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
b. Calcular el área de la región limitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x=1$, y el eje vertical.



Calculemos la recta tangente a la parábola en el punto $x=r$

punto de tangencia $P=(r,4-r^2);\ \ y'=-2x\ \Rightarrow\ m=y'(r)=-2r$

$r_{tg}\equiv y-(4-r^2)=-2r(x-r)\ ,\ r_{tg}\equiv y=-2rx+r^2+4$

cortamos la recta con los ejes de coordenadas

$$a=r_{tg}\cap OY \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2rx+r^2+4 \end{cases} \Rightarrow a=(0,r^2+4)$$

$$b=r_{tg}\cap OX \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-2rx+r^2+4 \end{cases} \Rightarrow b=\left(\frac{r^2+4}{2r},0\right)$$

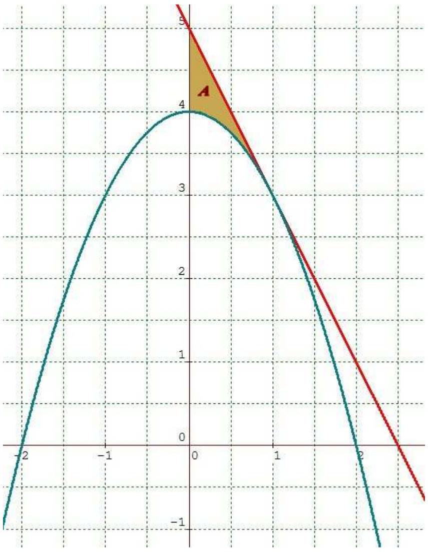
El triángulo $T(r)$ tiene por base b y por altura a

la función área será $A(r)=\dfrac{\frac{r^2+4}{2r}\cdot(r^2+4)}{2}\ ,\ A(r)=\dfrac{(r^2+4)^2}{4r}$

Busquemos el mínimo de la función área ; $A'(r)=\dfrac{16r^2\left(r^2+4\right)-4\left(r^2+4\right)^2}{16r^2}$; $A'(r)=0$

$16r^2\left(r^2+4\right)-4\left(r^2+4\right)^2=0 \Rightarrow 4\left(r^2+4\right)\left(3r^2-4\right)=0 \Rightarrow 3r^2-4=0 \Rightarrow r=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

como $r>0 \Rightarrow$ *el área del triángulo es mínima cuando* $r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$



La recta tangente a la parábola en el punto $(1,3)$ *es* $y=-2x+5$

el área pedida es la región sombreada A

$$A=\int_0^1\left[(-2x+5)-\left(4-x^2\right)\right]dx=\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx=$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula:

$a)\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt{1+3x^2}\,dx$ $\qquad$ $b)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

$$a)\ \int_0^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt{1+3x^2}\,dx=\frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{5}}6x\left(1+3x^2\right)^{1/2}dx=\frac{1}{6}\left[\frac{\left(1+3x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{16^3}}{3/2}-\frac{1}{3/2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{128}{3}-\frac{2}{3}\right)=7$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}=(\textit{dividiendo todo por } 6^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1}=\frac{0+0}{0+1}=0$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

a. Calcula las asíntotas, los puntos extremos y esboza la gráfica de $f(x)$.

b. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y la recta de ecuación $4x+5y-5=0$.

La función $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ *no tiene asíntotas verticales puesto que* $Dom(f)=\mathbb{R}$, $(4x^2+1\neq 0)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}}=1 \Rightarrow y=1 \text{ es asíntota horizontal}$$

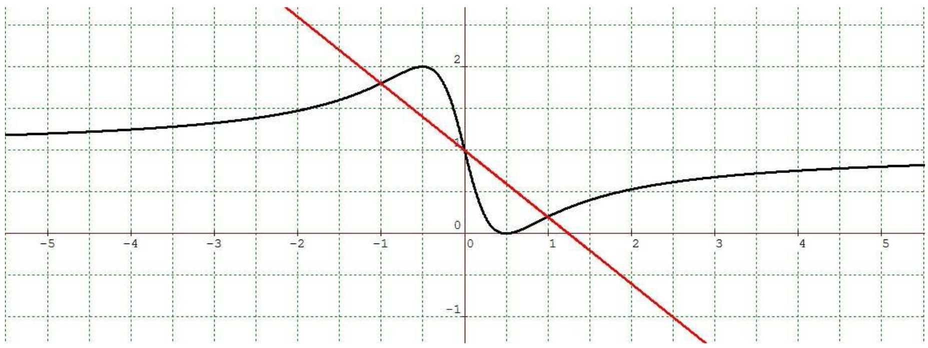
no tiene asíntota oblicua

$$f'(x)=\frac{(8x-4)(4x^2+1)-8x(4x^2-4x+1)}{(4x^2+1)^2}=\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}\ ;\ f'(x)=0 \Rightarrow 16x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{32x(4x^2+1)^2-2(4x^2+1)8x(16x^2-4)}{(4x^2+1)^4}=\frac{96x-128x^3}{(4x^2+1)^3}\ ;\ \begin{cases} f''\left(\frac{1}{2}\right)>0 \Rightarrow \text{en } x=\frac{1}{2} \text{ hay un mínimo } \left(\frac{1}{2},0\right) \\ f''\left(-\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow \text{en } x=-\frac{1}{2} \text{ hay un máximo } \left(-\frac{1}{2},2\right) \end{cases}$$

$f(x)$ *corta a los ejes en los puntos* $(0,1)$ *y* $\left(\frac{1}{2},0\right)$; $f''(x)=0 \Rightarrow 32x(3-4x^2)=0$; *en* $x=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *hay puntos de inflexión.*

Dibujamos las gráficas y calculamos el área pedida.



$$\frac{1}{2}A=\int_0^1\left(\frac{5-4x}{5}\right)dx-\int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\frac{1}{5}\left[5x-2x^2\right]_0^1-\left[x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\right]_0^1=\frac{3}{5}-\left(1-\frac{\ln 5}{2}\right)=\frac{5\ln 5-4}{10} \Rightarrow A=\frac{5\ln 5-4}{5}$$

$$\int\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\int\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{8x}{4x^2+1}dx=x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)$$