Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2ax+y-z=(a-1) \\ x+(a+3)y+3z=1 \\ ax+4y+3z=a \\ -x+4y+3z=a \end{cases}$, se pide:

- (1,5 puntos) Discute el sistema según los valores del parámetro real a .
- (1 punto) Resuélvelo en los casos de compatibilidad.

Solución:

La matriz ampliada del sistema es $\bar{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & -1 & a-1 \\ 1 & a+3 & 3 & 1 \\ a & 4 & 3 & a \\ -1 & 4 & 3 & a \end{pmatrix}$*, estudiemos su rango:*

$$|\bar{A}|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & -1 & a-1 \\ 1 & a+3 & 3 & 1 \\ a & 4 & 3 & a \\ -1 & 4 & 3 & a \end{vmatrix}_{F_3=F_3-F_4}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & -1 & a-1 \\ 1 & a+3 & 3 & 1 \\ a+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & a \end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ a+3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & a \end{vmatrix}_{F_2=F_2-F_3}=(a+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 1-a \\ 4 & 3 & a \end{vmatrix}_{C_3=C_3+C_1}=$$

$$=(a+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a-1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & a+4 \end{vmatrix}=-(a+1)(a-1)\begin{vmatrix} -1 & a \\ 3 & a+4 \end{vmatrix}_{F_2=F_2+3F_1}=-(a+1)(a-1)\begin{vmatrix} -1 & a \\ 0 & 4a+4 \end{vmatrix}=(a+1)(a-1)(4a+4)$$

$$|\bar{A}|=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow \textit{si } a\neq 1 \textit{ y } a\neq -1 \textit{, Rang } \bar{A}=4>\textit{Rang } A \Rightarrow \textit{Sistema incompatible.}$$

$$\textit{Para } a=1 \Rightarrow \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \textit{menor de orden } 2: \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\neq 0 \\ \textit{menor de orden } 3: \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \textit{Rang } A=3=\textit{Rang } \bar{A}=n^o \textit{ incógnitas.}$$

Si $a=1 \Rightarrow$ *Sistema compatible determinado*

$$\textit{Para } a=-1 \Rightarrow \bar{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} ;\ C_1=C_4 \textit{ y } F_3=F_4 \begin{cases} \textit{menor de orden } 2: \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0 \\ \textit{menor de orden } 3: \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0 \end{cases} \Rightarrow \textit{Rang } A=\textit{Rang } \bar{A}=2.$$

Si $a=-1$ *,* $\textit{Rang } A=\textit{Rang } \bar{A}=2<n^o$ *de incógnitas* $\Rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado;*

$Resolución\ \ para\ \ a=-1$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow \begin{cases} -2x+y=-2+z \\ x+2y=1-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow solución: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$Resolución\ \ para\ \ a=-1 \Rightarrow como \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -14$, $nos\ quedamos\ con\ las\ ecuaciones \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+4y+3z=1 \\ -x+4y+3z=1 \end{cases}$ $y\ resolvemos\ por$ $el\ método\ de\ Cramer:$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-14}=0 \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{-2}{-14}=\frac{1}{7} \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{-2}{-14}=\frac{1}{7}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, encuentra X tal que cumpla la igualdad: $A\cdot X\cdot B-C=2D$

Solución:

$Hay\ que\ resolver\ la\ ecuación\ \ A\cdot X\cdot B-C=2D$

$$A\cdot X\cdot B-C=2D \Rightarrow A\cdot X\cdot B=2D+C \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_2}\cdot X\cdot \underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I_3}=A^{-1}\cdot(2D+C)\cdot B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}\cdot(2D+C)\cdot B^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to |A|=2 \to Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix} A_{11}=-1 & A_{21}=4 \\ A_{12}=-1 & A_{22}=2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} ; |B|=-1 \to Adj\left(B^T\right)=\begin{pmatrix} B_{11}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=-3 & B_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=-1 & B_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1 \\ B_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=2 & B_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=0 & B_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1 \\ B_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=-2 & B_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=1 & B_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X=A^{-1}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\right]\cdot B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ determina todas las matrices no nulas $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifican la igualdad $A\cdot X=\lambda X$, para algún valor de λ.

Solución:

$$AX=\lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+2y-z \\ -x+z \\ -x-2y+3z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y-z=\lambda x \\ -x+z=\lambda y \\ -x-2y+3z=\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x+2y-z=0 \\ -x-\lambda y+z=0 \\ -x-2y+(3-\lambda)z=0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo, siempre compatible. Para que la matriz X sea diferente de la matriz nula, el sistema debe ser compatible indeterminado $\Rightarrow$ el rango de la matriz asociada al sistema debe ser menor que 3.

La matriz asociada al sistema es $B=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$; *Rang* $B<3 \Leftrightarrow |B|=0$.

$$|B|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}_{F_1=F_1+F_3}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}_{C_3=C_3-C_1}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}_{C_2=C_2-C_1}=(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 2-\lambda \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)^2\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=(2-\lambda)^3 \Rightarrow |B|=0 \Rightarrow (2-\lambda)^3=0 \Rightarrow \lambda=2$$

Si $\lambda=2$, *Rang* $B<3$ *y* $\overline{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ *tiene 3 filas proporcionales* $\Rightarrow$ *Rang* $B=$ *Rang* $\overline{B}=1$

El sistema queda $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ \cancel{-x-2y+z=0} \\ \cancel{-x-2y+z=0} \end{cases} \Rightarrow z=x+2y \Rightarrow$ *la matriz pedida es* $X=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+2\beta \end{pmatrix}$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dado el conjunto de matrices $A \in M_{2\times 2}$ tales que $|A| \neq 0$ y que cumplen $A^3 = 4A$.

- (1,5 puntos) Encuentra una matriz de ese conjunto con todos sus elementos diferentes de cero.
- (1 punto) Calcula el valor de $|A|$.

Solución:

$A \in M_{2\times 2}$ *y* $|A| \neq 0 \Rightarrow$ *existe la matriz* A^{-1}*. Como la matriz A cumple* $A^3 = 4A \Rightarrow A^3A^{-1} = 4AA^{-1} \Rightarrow A^2 = 4I$

Busquemos una matriz A con la condición $A^2 = 4I$ *y que tenga todos sus elementos distintos de cero*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;,\; A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \;;\; A^2 = 4I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc=4 \\ ab+bd=0 \\ ac+dc=0 \\ bc+d^2=4 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+bc=4 \longrightarrow \\ b(a+d)=0 \to b=0 \text{ o } d=-a \\ c(a+d)=0 \to c=0 \text{ o } d=-a \\ bc+d^2=4 \end{cases} \quad c=\frac{4-a^2}{b} \quad \text{como } b\neq 0 \text{ y } c\neq 0 \Rightarrow d=-a \to A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{4-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

Ahora, por ejemplo, si $a=1$ *y* $b=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *es una matriz que cumple* $A^3 = 4A$

$$Si\ A^3=4A \ \ y\ \ |A|\neq 0 \Rightarrow |A^3| = |4A| \Rightarrow \begin{cases} |A^3| = |A\cdot A\cdot A| = |A|\cdot|A|\cdot|A| = |A|^3 \\ |4A| = 4^2|A| = 16|A| \end{cases} \Rightarrow |A|^3 = 16|A| \Rightarrow |A|^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 4 \\ |A| = -4 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$, $u_1=(0\ ,\ 4\ ,\ k-2\ ,\ 1)$, $u_2=(k\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,-7)$, $u_3=(k-1\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,-5)$ y $u_4=(k\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,-2k)$.

- (1,5 puntos) Halla los valores del parámetro k para que el subespacio generado por $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ sea diferente de $\mathbb{R}^4$.
- (1 punto) Para $k=4$, encuentra una relación de dependencia lineal entre los 4 vectores.

Solución:

La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores que tiene cualquiera de sus bases, y también es el número mínimo de vectores necesarios para generar el espacio y el máximo número de vectores linealmente independientes que podemos encontrar en ese espacio vectorial.

Si los vectores del sistema $S=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ fuesen linealmente independientes, formarían una base de $\mathbb{R}^4$ y S sería un sistema de generadores para $\mathbb{R}^4$, eso significa que el subespacio generado por S coincide con $\mathbb{R}^4$, $\langle S\rangle=\mathbb{R}^4$.

Para que $\langle S\rangle\neq\mathbb{R}^4$, los vectores del sistema $S=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ deben ser linealmente dependientes. Si los colocamos en las filas o columnas de un determinante, éste debe ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 0 & k & k-1 & k \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ k-2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & -2k \end{vmatrix}_{C_3=C_3-C_2} = \begin{vmatrix} 0 & k & -1 & k \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ k-2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & -2k \end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_4=F_4+2F_1}} = \begin{vmatrix} 0 & k & -1 & k \\ 4 & k+3 & 0 & k+2 \\ k-2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2k-7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 4 & k+3 & k+2 \\ k-2 & 2 & 0 \\ 1 & 2k-7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=-(k+2)\begin{vmatrix} k-2 & 2 \\ 1 & 2k-7 \end{vmatrix} = -(k+2)\left[(k-2)(2k-7)-2\right] = -(k+2)\left(2k^2-11k+12\right) = -(k+2)(k-4)(2k+3)$$

$$-(k+2)(k-4)(2k+3)=0 \quad\Rightarrow\quad k=-2\ ,\ k=4\ ,\ k=\frac{3}{2}. \qquad \textit{Si } k=-2\ ,\ k=4 \textit{ o } k=\frac{3}{2} \Rightarrow \langle S\rangle\neq\mathbb{R}^4$$

Para $k=4$ sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$ *y* $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6 \Rightarrow u_1, u_2, u_3$ *son linealmente independientes* $(RangA=3)$

$$xu_1+yu_2+zu_3=u_4 \quad\Rightarrow\quad x(0,4,2,1)+y(4,3,2,-7)+z(3,4,2,-5)=(4,2,0,-8) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 4y+3z=4 \\ 4x+3y+4z=2 \\ 2x+2y+2z=0 \\ \cancel{x-7y-5z=-8} \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-12}{6}=-2\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-12}{6}=-2\ ;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{6}{6}=1 \ \rightarrow\ -2u_1-2u_2+u_3=u_4 \ \rightarrow\ 2u_1+2u_2-u_3-u_4=0$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n tales que $|A|=2$ y $|B|=3$.

- (1,5 puntos) Decide, razonadamente, si alguna de las siguientes igualdades es cierta:
  $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$; $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$; $(AB)^{T}=A^{T}B^{T}$, $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$.
- (0,5 puntos) ¿Podría ser cierta la igualdad $A^{-1}=A^{T}$? Justifica la respuesta.
- (0,5 puntos) Calcula el valor de $\left|\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right|$

Solución:

Como $|A|=2$ *y* $|B|=3 \;\Rightarrow\; |AB|=|A|\cdot|B|=6 \;\Rightarrow\;$ *la matriz* AB *tiene inversa* $(AB)^{-1}$

$$AB(AB)^{-1}=I \quad \begin{cases} ABA^{-1}B^{-1}\neq I \text{ si las matrices } A \text{ y } B \text{ no conmutan } \Rightarrow \text{en general } (AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1} \\ A\underbrace{BB^{-1}}_{I}A^{-1}=AA^{-1}=I \quad \Rightarrow \quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \end{cases}$$

$$A\in M_{n\times n} \;\Rightarrow\; A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \;;\; B\in M_{n\times n} \;\Rightarrow\; B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}} \;,\; B=(b_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}} \;\Rightarrow\; AB=(c_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}} \quad \text{donde } c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\cdots\cdots+a_{in}\cdot b_{nj}$$

$$(AB)^{T}=(c'_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}} \quad \text{donde } c'_{ij}=c_{ji}=a_{j1}\cdot b_{1i}+a_{j2}\cdot b_{2i}+a_{j3}\cdot b_{3i}+\cdots\cdots+a_{jn}\cdot b_{ni}$$

$$A^{T}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{j2} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{fila } i \\ \uparrow \\ \text{columna } j \end{array} \;,\; B^{T}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{j1} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{j2} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{ji} & \cdots & b_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{jn} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{fila } i \\ \uparrow \\ \text{columna } j \end{array}$$

$$A^{T}B^{T}=(d_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}} \;,\; \text{donde } d_{ij}=a_{1i}\cdot b_{j1}+a_{2i}\cdot b_{j2}+a_{3i}\cdot b_{j3}+\cdots\cdots+a_{ni}\cdot b_{jn} \;\rightarrow\; d_{ij}\neq c'_{ij} \;\Rightarrow\; (AB)^{T}\neq A^{T}B^{T}$$

$$B^{T}A^{T}=(d'_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}} \;,\; \text{donde } d'_{ij}=b_{1i}\cdot a_{j1}+b_{2i}\cdot a_{j2}+b_{3i}\cdot a_{j3}+\cdots\cdots+b_{ni}\cdot a_{jn} \;\rightarrow\; d'_{ij}=c'_{ij} \;\Rightarrow\; (AB)^{T}=B^{T}A^{T}$$

$$|A^{T}|=|A| \;;\; \text{como } AA^{-1}=I \;\Rightarrow\; |AA^{-1}|=|I| \;\Rightarrow\; |A|\cdot|A^{-1}|=1 \;\Rightarrow\; |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

$$\text{Si } A^{-1}=A^{T} \;\Rightarrow\; |A^{-1}|=|A^{T}| \;,\; \text{pero } |A^{-1}|=\frac{1}{2} \;\; y \;\; |A^{T}|=2 \;\Rightarrow\; A^{-1}\neq A^{T}$$

$$A \in M_{n\times n} \; y \; |A| = 2 \quad \rightarrow \quad \left| \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} \right| = \frac{1}{\left|\left(\frac{1}{2}A\right)\right|} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |A|} = \frac{1}{\frac{1}{2^n}\cdot 2} = \frac{1}{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2^{n-1}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a, $\begin{cases} ax-2y+z=(a+3) \\ ax+(a+1)y+z=a \\ ax+(a-3)y+az=(a+3) \end{cases}$

- (1,5 puntos) Discute el sistema según los valores de a.
- (1 punto) Si es posible, resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

La matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ a & a+1 & 1 \\ a & a-3 & a \end{pmatrix}$ *; estudiemos su rango según los valores de a.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & 1 \\ a & a+1 & 1 \\ a & a-3 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a-3 & a \end{vmatrix}_{C_3=C_3-C_1} = a\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 1 & a-3 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = a(a-1)(a+3)$$

$$|A| = a(a-1)(a+3) \;\rightarrow\; |A| = 0 \;\Rightarrow\; a(a-1)(a+3) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=-3 \end{cases} \;\Rightarrow\; si\ a\neq 0,\ a\neq 1\ y\ a\neq -3,\ Rang\ A = 3$$

$$Si\ a=0 \;\Rightarrow\; Rang\ A<3\ y\ \ \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ A = 2 \\ menor\ de\ orden\ 3: \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; Rang\ \bar{A} = 2 \end{cases}$$

$$Si\ a=1 \;\Rightarrow\; Rang\ A<3\ y\ \ \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ A = 2 \\ menor\ de\ orden\ 3: \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; Rang\ \bar{A} = 2 \end{cases}$$

$$Si\ a=-3 \;\Rightarrow\; Rang\ A<3\ y\ \ \bar{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} menor\ de\ orden\ 2: \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ A = 2 \\ menor\ de\ orden\ 3: \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \;\Rightarrow\; Rang\ \bar{A} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} si\ a\neq 0,\ a\neq 1\ y\ a\neq -3,\ Rang\ A = 3 = Rang\ \bar{A} = n^o\ incógnitas \Rightarrow sistema\ compatible\ determinado. \\ si\ a=0,\ Rang\ A = 2 = Rang\ \bar{A} < n^o\ incógnitas \;\Rightarrow\; sistema\ compatible\ indeterminado. \\ si\ a=1,\ Rang\ A = 2 = Rang\ \bar{A} < n^o\ incógnitas \;\Rightarrow\; sistema\ compatible\ indeterminado. \\ si\ a=-3,\ Rang\ A = 2 \neq Rang\ \bar{A} = 3 \;\Rightarrow\; sistema\ incompatible. \end{cases}$$

Resolvemos para $a=0$

$$\begin{cases} -2y+z=3 \\ y+z=1 \\ -3y=3 \end{cases} \rightarrow \text{menor de orden } 2: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2y+z=3} \\ y+z=1 \\ -3y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

Resolvemos para $a=1$

$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ x+2y+z=1 \\ x-2y+z=4 \end{cases} \rightarrow \text{menor de orden } 2: \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} x-2y+z=4 \\ x+2y+z=1 \end{matrix}\right\} 4y=-3 \quad y=-\dfrac{3}{4} \\ \cancel{x-2y+z=4} \end{cases} \rightarrow 2x+2z=5 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2}-\lambda \\ y=-\dfrac{3}{4} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

(1,5 puntos) Determina todas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea $2I-A$

(1 punto) Siendo A una matriz cualquiera del apartado anterior, encuentra A^n.

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \quad y \quad A^{-1}=2I-A=\begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 2-c \end{pmatrix}$$

$$A(2I-A)=I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 2-c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -bc & -ab+2c-c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -ab=1 \rightarrow a\neq 0,\ b\neq 0 \rightarrow b=-\dfrac{1}{a} \\ -ac=0 \rightarrow \text{como } a\neq 0 \rightarrow c=0 \\ -bc=0 \rightarrow c=0 \\ -ab+2c-c^2=1 \rightarrow -ab=1 \rightarrow b=-\dfrac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -\dfrac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \text{ para cada valor de } a\ (a\neq 0)\text{, una matriz que cumple } A^{-1}=2$$

Busquemos A^n

Podemos multiplicar la matriz A sucesivas veces y buscar la regularidad, pero también podemos aplicar que $A^{-1}=2I-A$

Como A cumple que $A(2I-A)=I \Rightarrow 2A-A^2=I \Rightarrow A^2=2A-I$

$A^3=2A^2-A=2(2A-I)-A \rightarrow A^3=3A-2I$

$A^4=3A^2-2A=3(2A-I)-2A \rightarrow A^4=4A-3I$

$A^5=4A^2-3A=4(2A-I)-3A \rightarrow A^5=5A-4I$

Entonces $A^n=nA-(n-1)I \rightarrow A^n=n\begin{pmatrix} 2 & a \\ -\dfrac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}-(n-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{pmatrix} n+1 & na \\ -\dfrac{n}{a} & 1-n \end{pmatrix}$