INSTITUTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
Pedro de Tolosa
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

NOMBRE:

GRUPO: 2º BTO.-A

FECHA: 19 - febrero - 2020

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $A(2,-1,-3)$ y $B(4,-5,1)$, se pide:

- (1 punto) Las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento $\overline{AB}$.
- (0,75 puntos) La ecuación del plano respecto del cual A es simétrico de B.
- (0,75 puntos) La ecuación de la esfera que tiene por extremos de un diámetro a los puntos A y B.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dados el plano $\pi \equiv 2x-4y-z+4=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x+y-z=3 \\ x-2y-z=-3 \end{cases}$, se pide:

- (0,75 puntos) La ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
- (1 punto) La ecuación de la recta que está contenida en el plano π y corta perpendicularmente a la recta r.
- (0,75 puntos) El volumen del tetraedro que forma el plano π con los planos coordenados.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$, $r_2 \equiv \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, $r_3 \equiv \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$.

- (1,75 puntos) Encuentra la ecuación de la recta t que es paralela a r_3 y corta a las rectas r_1 y r_2.
- (0,75 puntos) Determina los puntos de corte de la recta t con las rectas r_1 y r_2.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

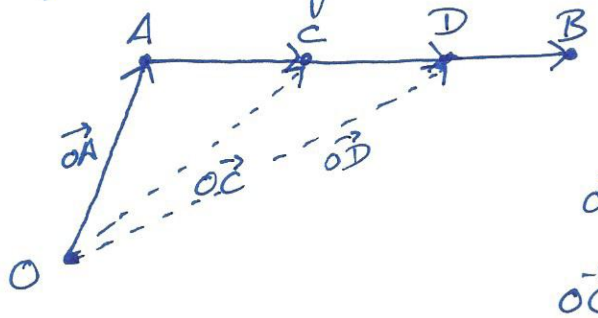
Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x+4y-5z-7=0$, $\pi_2 \equiv x-2y+z-3=0$ y el punto $P(1,0,-2)$, se pide:

- (1 punto) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a π_1 y π_2.
- (1,5 puntos) Determina la distancia entre el punto P y la recta común a los planos π_1 y π_2.

OPCIÓN B

1.- $A(2,-1,-3)$; $B(4,-5,1)$

a) Coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento $\overline{AB}$



$\vec{AB} = (2,-4,4)$

$\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

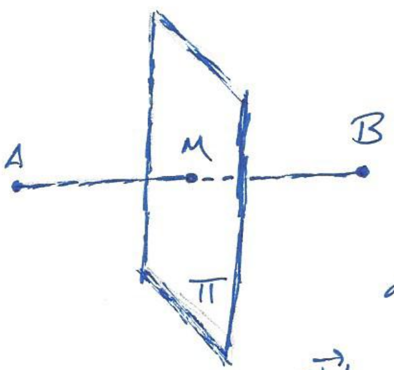
$\vec{OC} = (2,-1,-3) + \frac{1}{3}(2,-4,4)$

$\vec{OC} = \left(\frac{8}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-5}{3}\right) \Rightarrow C\left(\frac{8}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-5}{3}\right)$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AB} \Rightarrow \vec{OD} = (2,-1,-3) + \frac{2}{3}(2,-4,4)$

$\vec{OD} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rightarrow D\left(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

b) Ecuación del plano respecto del cual A es simétrico de B



π tiene como vector normal al vector $\vec{AB} = (2,-4,4)$ o al vector $\vec{q} = (1,-2,2)$, y contiene al punto medio entre A y B

$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = (3,-3,-1) \Rightarrow M(3,-3,-1)$

$\Rightarrow \pi \equiv (x-3) - 2(y+3) + 2(z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y + 2z - 7 = 0$

c) La esfera pedida tiene centro en $M(3,-3,-1)$ y radio

$\frac{|\vec{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}}{2} = 3 \Rightarrow$ su ecuación será:

$$S \equiv (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$$

2.- $\pi \equiv 2x-4y-z+4=0 \rightarrow$ vector normal a π; $\vec{\eta}=(2,-4,-1)$

$r \equiv \begin{cases} 4x+y-z=3 \\ x-2y-z=-3 \end{cases} \rightarrow$ en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} P(0,2,-1) \\ \vec{v}=(1,-1,3) \end{array}$

a) El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π, contendrá al punto de r, al vector de r y al vector normal a π.

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(0,2,-1) \\ \vec{v}=(1,-1,3) \\ \vec{\eta}=(2,-4,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi' \equiv 13x+7y-2z-16=0$$

b) La recta pedida, s, por estar contenida en π, tendrá dirección perpendicular a $\vec{\eta}=(2,-4,-1)$, y por ser perpendicular a r, tendrá dirección perpendicular a $\vec{v}=(1,-1,3) \Rightarrow$ por tanto su dirección será $\vec{v} \wedge \vec{\eta}$, es decir, la dirección del vector normal a π', $\vec{\eta}'=(13,7,-2)$

$$\vec{v} \wedge \vec{\eta} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 13\vec{e_1}+7\vec{e_2}-2\vec{e_3}$$

Además, como s corta a r, pasará por el punto $A = r \cap \pi$

$A \in r \Rightarrow A(\lambda, 2-\lambda, -1+3\lambda)$

$A \in \pi \Rightarrow 2\lambda-4(2-\lambda)-(-1+3\lambda)+4=0 \Rightarrow \lambda=1$

$A(1,1,2)$

Entonces, la recta $s \equiv \begin{cases} x=1+13\lambda \\ y=1+7\lambda \\ z=2-2\lambda \end{cases}$

c) Las cuatro caras del tetraedro que nos indican son el plano π y los tres planos coordenados.

Cada vértice del tetraedro, será el corte de tres de esos planos.

$\Pi \equiv 2x-4y-z+4=0$; planos coordenados: $\Pi_1 \equiv x=0$, $\Pi_2 \equiv y=0$, $\Pi_3 \equiv z=0$

$A = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 \Rightarrow A(0,0,0)$

$B = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi \Rightarrow B(0,0,4)$ $\qquad \vec{AB} = (0,0,4)$

$C = \Pi_1 \cap \Pi_3 \cap \Pi \Rightarrow C(0,1,0)$ $\qquad \vec{AC} = (0,1,0)$

$D = \Pi_2 \cap \Pi_3 \cap \Pi \Rightarrow D(-2,0,0)$ $\qquad \vec{AD} = (-2,0,0)$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}; \vec{AC}, \vec{AD}] \right|$$

$$[\vec{AB}; \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |8| = \frac{4}{3} u^3$$

3.- $r_1 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{2}$; $r_2 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$; $r_3 \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$

a) Nos piden encontrar la recta t que es paralela a r_3 y corta a las otras dos rectas.

Tomamos el plano Π que es paralelo a r_3 y contiene a una de las otras rectas, p. ej. a r_2

$$\Pi \equiv \begin{cases} \text{- punto de } r_2,\ A(2,0,-1) \\ \text{- vector de } r_2,\ \vec{v_2} = (3,1,-1) \\ \text{- vector de } r_3,\ \vec{v_3} = (-1,1,3) \end{cases} \Rightarrow \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \Pi \equiv 4x-8y+4z-4=0 \Rightarrow \Pi \equiv x-2y+z-1=0$$

Ahora calculamos el punto de corte entre el plano Π y la recta r_1, $P = \Pi \cap r_1$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad ; \quad P \in r_1 \Rightarrow P(-1+\lambda, 3-2\lambda, 1+2\lambda)$$

$P \in \Pi \Rightarrow \quad (-1+\lambda) - 2(3-2\lambda) + (1+2\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$P(0,1,3)$

Entonces la recta $t \equiv \begin{cases} \text{contiene a } P(0,1,3) \\ \text{tiene la dirección de } \vec{v_3} = (-1,1,3) \end{cases}$

$$t \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{cases}$$

- es paralela a r_3 porque comparte vector
- corta a r_1 porque pasa por el punto P
- corta a r_2 porque están en el mismo plano Π y no son paralelas.

• También se podría haber calculado como intersección de los planos Π y Π', siendo Π' el plano que contiene a r_1 y es paralelo a r_3.

b) Puntos de corte de t con r_1 y r_2.

Ya tenemos uno, $P(0,1,3)$, punto de corte entre t y r_1.

Calculemos $Q = t \cap r_2$

$$t \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{cases} ; \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 2+3\mu \\ y = \mu \\ z = -1-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda = 2+3\mu \\ 1+\lambda = \mu \\ 3+3\lambda = -1-\mu \end{cases} \quad \lambda = -\frac{5}{4} \quad \mu = -\frac{1}{4}$$

Entonces, el punto Q, lo obtenemos sustituyendo el valor de λ en t o el valor de μ en r_2

$$Q = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

4.- $\Pi_1 \equiv 3x+4y-5z-7=0$, $\Pi_2 \equiv x-2y+z-3=0$

$\vec{n}_1=(3,4,-5)$ $\qquad$ $\vec{n}_2=(1,-2,1)$

a) Nos piden la ecuación de un plano Π que contiene al punto $P(1,0,-2)$ y es perpendicular a Π_1 y Π_2, por tanto, contiene a los vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \Pi \equiv -6x-8y-10z-14=0$$

$$\Pi \equiv 3x+4y+5z+7=0$$

b) Distancia entre el punto P y la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+4y-5z-7=0 \\ x-2y+z-3=0 \end{cases}$

La dirección de la recta r, la marca el vector $\vec{v}=\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ es decir, el vector normal al plano Π, $\vec{v}=(3,4,5)$.

Buscamos un plano que contiene a $P(1,0,-2)$ y es perpendicular a $r \Rightarrow$ Es decir, el plano calculado antes.

$\Pi \equiv 3x+4y+5z+7=0$

$$P'=r\cap\Pi \Rightarrow P'=\begin{cases} 3x+4y-5z=7 \\ x-2y+z=3 \\ 3x+4y+5z=-7 \end{cases} \qquad P'\left(\frac{44}{25}, \frac{-33}{25}, \frac{-35}{25}\right)$$

Ahora: $d(P,r)=d(P,P')=|\vec{PP'}|=\sqrt{\left(\frac{19}{25}\right)^2+\left(\frac{-33}{25}\right)^2+\left(\frac{15}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{67}}{5}$ u.

$\vec{PP'}=\left(\frac{19}{25}, \frac{-33}{25}, \frac{15}{25}\right)$