INSTITUTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
Pedro de Tolosa
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

**NOMBRE:**

**GRUPO:** 2º BTO.-A

**FECHA:** 19 - febrero - 2020

# *Opción A*

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=0$, la recta $r \equiv x=y=z$ y el punto $A(3,2,1)$.

- (1punto) Halla la recta que pasa por $A$, es paralela a $\pi$ y corta a $r$.
- (1 punto) Encuentra el punto simétrico del punto $A$ respecto del plano $\pi$.
- (0,5 puntos) Halla el ángulo que forman la recta $r$ y el plano $\pi$.

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $A(-2,3,1)$, $B(1,1,-1)$ y $C(3,0,1)$, se pide:

- (0,75 puntos) La ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
- (0,75 puntos) Halla el área del triángulo que tiene por vértices los puntos A, B y C.
- (1 punto) Halla unas ecuaciones de la recta que contiene a la altura relativa al vértice A del triángulo anterior.

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran las rectas $r \equiv \dfrac{x}{-1} = y-1 = \dfrac{z-2}{-2}$ , $s \equiv \dfrac{x-5}{3} = y = z+1$

- (0,75 puntos) Determina la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.
- (0,75 puntos) Calcula la distancia entre las rectas $r$ y $s$.
- (1 punto) Encuentra las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a $r$ y $s$.

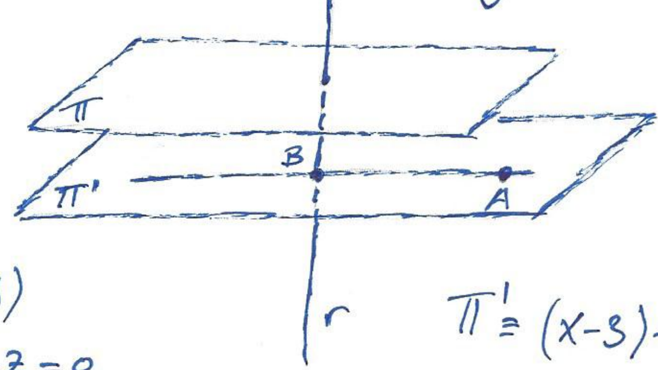
**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+az=0 \\ ay-z=4 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x+y+z=2$.

- (1 punto) Hallar los valores de $a$ para los que $r$ es paralela a $\pi$.
- (1,5 puntos) Para $a=1$, halla la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$.

## OPCIÓN A

1.- a) Llamamos $s$ a la recta que pasa por el punto $A$, es paralela al plano $\pi$ y corta a la recta $r$.




$s$ estará contenida en un plano $\pi'$, paralelo a $\pi$ y que pasa por $A$

$A(3,2,1)$

$\pi \equiv x+y+z=0$

$r \equiv x=y=z$

$\pi' \equiv (x-3)+(y-2)+(z-1)=0$

$\pi' \equiv x+y+z-6=0$

Como $s$ tiene que cortar a $r$, también pasará por el punto $B = r \cap \pi'$

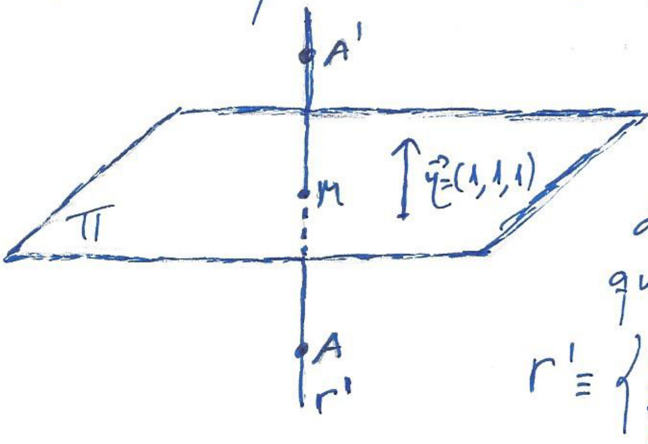
$$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow B \in r \Rightarrow B(\lambda,\lambda,\lambda)$$

$$B \in \pi' \Rightarrow \lambda+\lambda+\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow B(2,2,2)$$

Ahora $s$ es la recta que pasa por $A$ y por $B$

$$s \equiv \begin{cases} A(3,2,1) \\ \vec{AB}=(-1,0,1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2 \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

b) $A'$ punto simétrico de $A$ con respecto a $\pi$




$M$ punto medio entre $A$ y $A'$

Calculamos $M$ como la intersección de $\pi$ con la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $A$.

$$r' \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} ; \quad M \in r' \Rightarrow M(3+\lambda, 2+\lambda, 1+\lambda)$$

$M \in \pi \Rightarrow (3+\lambda)+(2+\lambda)+(1+\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-2$

$M(1,0,-1)$; ahora $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OA'}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OA'}=2\vec{OM}-\vec{OA} \Rightarrow \vec{OA'}=2(1,0,-1)-(3,2,1) \Rightarrow$

$\vec{OA'}=(-1,-2,-3)$ y $A'(-1,-2,-3)$

c) El ángulo $\alpha$ que forman la recta $r$ y el plano $\pi$ es el complementario del ángulo que forman el vector director de la recta, $\vec{v}=(1,1,1)$, con el vector normal al plano, $\vec{\eta}=(1,1,1)$. Al ser proporcionales, ese ángulo es $0° \Rightarrow \alpha=90°$

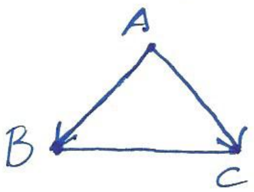
2.- $A(-2,3,1)$; $B(1,1,-1)$; $C(3,0,1)$

a) $\pi \equiv$ plano que contiene a los tres puntos.

$$\pi \equiv \begin{cases} B(1,1,-1) \\ \vec{AB}=(3,-2,-2) \\ \vec{AC}=(5,-3,0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\pi \equiv -6x-10y+z+17=0$$

b) Área del triángulo que tiene por vértices los puntos A, B y C




$$A_{\text{Triángulo}}=\frac{|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|}{2}=\frac{\sqrt{(-6)^2+(-10)^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{137}}{2}\,u^2$$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=(-6,-10,1)$

c) La recta que contiene a la altura relativa al vértice A, en el triángulo anterior, está en el plano $\pi$ y también en un plano $\pi'$, perpendicular al lado $\overline{BC}$ y que pasa por A.

$\pi'$ tiene como vector normal a $\vec{BC} = (2,-1,2)$ y contiene al punto $A(-2,3,1)$

$$\pi' \equiv 2(x+2) - (y-3) + 2(z-1) = 0$$

$$\pi' \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$$

La recta pedida es $r \equiv \begin{cases} -6x - 10y + z + 17 = 0 \\ 2x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$

3.- $r \equiv \frac{x}{-1} = y - 1 = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = (-1,1,-2) \text{ vector director de } r \\ A(0,1,2) \text{ punto de } r \end{cases}$

a) $s \equiv \frac{x-5}{3} = y = z+1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (3,1,1) \text{ vector director de } s \\ B(5,0,-1) \text{ punto de } s \end{cases}$

$\vec{AB} = (5,-1,-3)$. Si los vectores $\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{AB}$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ No pertenecen al mismo plano $\Rightarrow$ las rectas se cruzan

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Son linealmente independientes $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

b) Para calcular la distancia entre r y s, buscamos el plano $\pi$ que contiene a r y es paralelo a s.

$$\pi \equiv \begin{cases} A(0,1,2) \\ \vec{v}=(-1,1,-2) \\ \vec{u}=(3,1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv 3x-5y-4z+13=0$$

Ahora $d(s,r)=d(s,\pi)=d(B,\pi)$

$$d(B,\pi)=\frac{|3\cdot 5-5\cdot 0-4\cdot(-1)+13|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2}}=\frac{32}{\sqrt{50}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}\ u.$$

c) Para encontrar la perpendicular común a $r$ y $s$, vamos a calcular dos planos:

$\pi_1 \equiv$ plano que contiene a $r$ y al vector $\vec{v}\wedge\vec{u}=(3,-5,-4)$, perpendicular a ambas rectas.

$\pi_2 \equiv$ plano que contiene a $s$ y al vector $\vec{v}\wedge\vec{u}$.

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \pi_1 \equiv -14x-10y+2z+6=0$$

$$\pi_1 \equiv 7x+5y-z-3=0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z+1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \pi_2 \equiv x+15y-18z-23=0$$

La recta pedida, $t$, será la intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ $\Rightarrow$

$$t \equiv \begin{cases} 7x+5y-z-3=0 \\ x+15y-18z-23=0 \end{cases}$$

4.- $r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases}$ ; $\pi \equiv x + y + z = 2$

a) La recta r será paralela al plano $\pi$ cuando el vector director de la recta, $\vec{v}$, sea perpendicular al vector normal al plano, $\vec{\eta} = (1,1,1)$, es decir,

$\vec{v} \cdot \vec{\eta} = 0$

$\vec{v} = \vec{\eta}_1 \wedge \vec{\eta}_2$ , siendo $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$ los vectores normales a los planos que determinan la recta.

$\vec{\eta}_1 = (1, -1, a)$ ; $\vec{\eta}_2 = (0, a, -1)$

$$\vec{\eta}_1 \wedge \vec{\eta}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = (1-a^2)\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + a\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v} = (1-a^2, 1, a)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\eta} = 1 - a^2 + 1 + a = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

b) si $a = -1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow$ en paramétricas $\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

La proyección ortogonal de r sobre $\pi$ la podemos obtener como el corte del plano $\pi$ con un plano $\pi'$ que contiene a r y es perpendicular a $\pi$.

$\pi' \equiv \begin{cases} \text{contiene a } r \\ \text{contiene a } \vec{\eta} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} P(4,4,0) \\ \vec{v} = (0,1,1) \\ \vec{\eta} = (1,1,1) \end{cases}$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv y - z - 4 = 0$$

$$\text{Proyección} \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - z = 4 \end{cases}$$