

Instrucciones: Debes resolver dos ejercicios del bloque de geometría y otros dos del bloque de probabilidad, a elegir entre los tres propuestos en cada bloque.

BLOQUE DE GEOMETRÍA

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(3, -5, 2)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 3$, se pide:

- (1 punto) Ecuaciones de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ que es paralela al plano π .
- (0,75 puntos) Ecuación del plano que contiene al segmento $\overline{AB}$ y es perpendicular al plano π
- (0,75 puntos) Distancia entre el punto $P(-2, 0, 3)$ y la recta que pasa por los puntos A y B .

Solución:

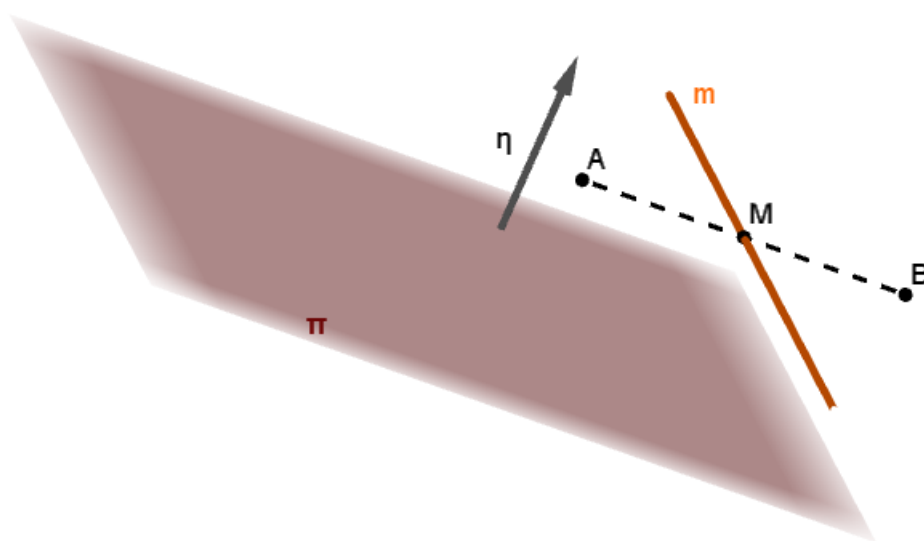
$A(1, -1, 2)$, $B(3, -5, 2)$ y $\pi \equiv 2x + y - z = 3$

Buscamos la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ que es paralela al plano $\pi \Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Pasa por el punto medio de } A \text{ y } B \\ \text{Su dirección es perpendicular al vector } \overline{AB} \\ \text{Su dirección es perpendicular al vector normal a } \pi \end{cases}$

Las coordenadas de M , punto medio entre A y B , son las de su vector de posición $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OA} = (2, -3, 2)$

La dirección de la mediatriz es la del vector $\vec{v} = \vec{\eta} \wedge \overline{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3 \rightarrow \vec{v} = (-4, -2, -10)$

$\vec{u} = (2, 1, 5)$ tiene igual dirección que $\vec{v} \Rightarrow$ las ecuaciones de la mediatriz $m \equiv \begin{cases} M(2, -3, 2) \\ \vec{u} = (2, 1, 5) \end{cases} \Rightarrow m \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 + 5\lambda \end{cases}$



$$A(1, -1, 2), B(3, -5, 2) \text{ y } \pi \equiv 2x + y - z = 3$$

Buscamos el plano que contiene al segmento $\overline{AB}$ y es perpendicular al plano $\pi \Rightarrow$

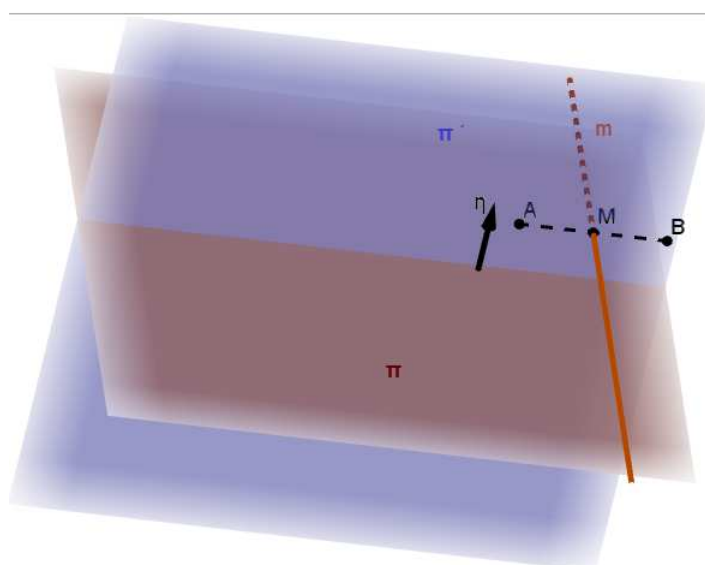
$$\begin{cases} \text{Pasa por los puntos A y B} \\ \text{Tiene la dirección del vector } \overline{AB} \\ \text{Tiene la dirección del vector normal a } \pi \end{cases}$$

$$\text{La ecuación del plano es } \pi' \equiv \begin{cases} A(1, -1, 2) \\ \overline{AB} = (2, -4, 0) \\ \vec{\eta} = (2, 1, -1) \end{cases} \xrightarrow{\text{igual dirección}} \vec{w} = (1, -2, 0) \quad \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi' \equiv 2x + y + 5z - 11 = 0$$

Si hemos calculado la mediatriz del apartado anterior, el plano pedido es perpendicular a esa mediatriz y pasa por A

$$\pi' \equiv 2(x-1) + (y+1) + 5(z-2) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + y + 5z - 11 = 0$$



$$A(1, -1, 2), B(3, -5, 2) \text{ y } P(-2, 0, 3)$$

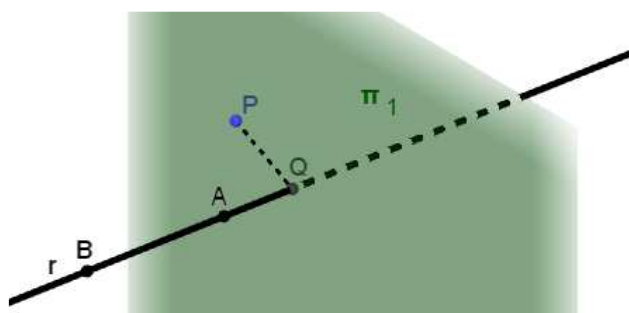
$$\text{La recta que pasa por A y B} \Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por el punto A} \\ \text{Tiene la dirección del vector } \overline{AB} \text{ o } \vec{w} = (1, -2, 0) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Calculamos un plano perpendicular a r y que pasa por P

$$\pi_1 \equiv (x+2) - 2y + 0(z-3) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 2y + 2 = 0; \quad Q = r \cap \pi_1 \Rightarrow \begin{cases} Q \in r, Q(1+\lambda, -1-2\lambda, 2) \\ Q \in \pi_1, (1+\lambda) - 2(-1-2\lambda) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$5\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q(0, 1, 2).$$

$$\text{Ahora } d(P, r) = d(P, Q) = |\overline{PQ}| = \sqrt{6}$$



Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} x+ay-2z=3 \\ ax+y+az=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-y+3z-2=0$, se pide:

- (1 punto) Encuentra el valor, o valores, del parámetro a para que r no corte al plano π .
- (0,5 puntos) Para $a=-2$ halla el ángulo que forman la recta r y el plano π .
- (1 punto) Para $a=1$ consideramos dos puntos del plano π , $A(4,-1,-1)$ y B que es el punto de intersección entre r y π . Encuentra un punto $C \in r$ tal que el triángulo ABC tenga área 5.

Solución:

Una recta es paralela a un plano cuando el vector director de la recta es perpendicular al vector normal al plano.

r nos la dan como corte de dos planos $r \equiv \begin{cases} x+ay-2z=3 \rightarrow \vec{\eta}_1=(1, a, -2) \\ ax+y+az=0 \rightarrow \vec{\eta}_2=(a, 1, a) \end{cases}$ el vector director de r es $\vec{v}=\vec{\eta}_1 \wedge \vec{\eta}_2$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & a & -2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = (a^2+2)\vec{e}_1 - 3a\vec{e}_2 + (1-a^2)\vec{e}_3 \rightarrow \vec{v} = (a^2+2, -3a, 1-a^2) ; \pi \equiv x-y+3z-2=0 \rightarrow \vec{\eta} = (1, -1, 3)$$

$$r \text{ es paralela a } \pi \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{\eta} = 0 \Rightarrow a^2+2+3a+3-3a^2=0 \Rightarrow -2a^2+3a+5=0 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\text{Para } a=-2 \Rightarrow \vec{v}=(6, 6, -3) \xrightarrow{\text{igual dirección}} \vec{u}=(2, 2, -1) ; |\vec{u} \cdot \vec{\eta}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{\eta}| \cdot \left| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{\eta}}) \right|$$

$$|2-2-3| = \sqrt{9} \cdot \sqrt{11} \cdot \left| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{\eta}}) \right| \Rightarrow \left| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{\eta}}) \right| = \frac{3}{3\sqrt{11}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{\eta}}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = 72,45^\circ$$

$$\text{Ángulo entre la recta y el plano } \alpha = 90^\circ - 72,45^\circ \Rightarrow \alpha = 17,55^\circ$$

$$A(4, -1, -1), r \equiv \begin{cases} x+y-2z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}, B=r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} B \in r \rightarrow B(\lambda, 1-\lambda, -1) \\ B \in \pi \rightarrow \lambda - (1-\lambda) + 3 \cdot (-1) - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 3 \end{cases}$$

$$B(3, -2, -1) ; C \in r \Rightarrow C = (\lambda, 1-\lambda, -1)$$

$$\text{Área}_{\text{triángulo } ABC} = \frac{|\overline{AB} \wedge \overline{AC}|}{2} \rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = (-1, -1, 0) \\ \overline{AC} = (\lambda-4, 2-\lambda, 0) \end{cases} \rightarrow \overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & -1 & 0 \\ \lambda-4 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2\lambda-6)\vec{e}_3$$

$$|\overline{AB} \wedge \overline{AC}| = \sqrt{(2\lambda-6)^2} = |2\lambda-6| \rightarrow \frac{|2\lambda-6|}{2} = 5 \rightarrow |2\lambda-6| = 10 \rightarrow \begin{cases} 2\lambda-6=10 \rightarrow \lambda=8 \\ 2\lambda-6=-10 \rightarrow \lambda=-2 \end{cases}$$

$$\text{Hay dos puntos de } r \text{ que cumplen la condición exigida: } \begin{cases} C_1(8, -7, -1) \\ C_2(-2, 3, -1) \end{cases}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 3 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$, se pide:

- (1,5 puntos) Los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π .
- (1 punto) Halla el punto simétrico del centro de la esfera con respecto al plano π .

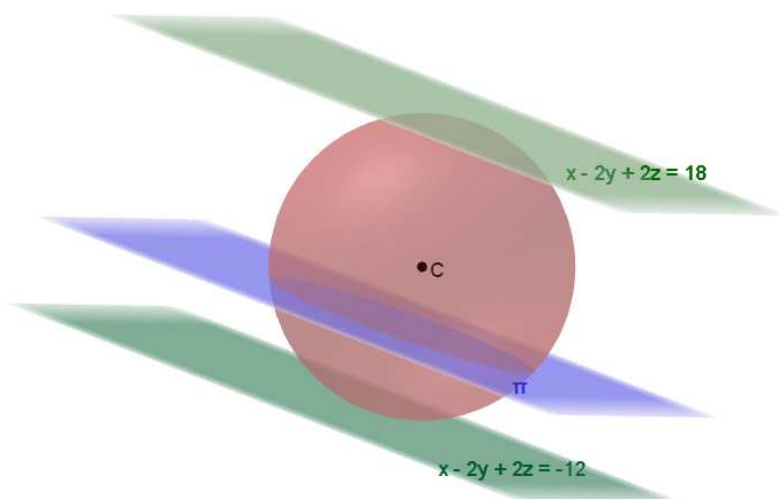
Solución:

$$\pi \equiv x - 2y + 2z + 3 = 0 \quad \text{y la esfera de ecuación } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} \text{Centro } C(1, 1, 2) \\ \text{Radio } R = 5 \end{cases}$$

Los planos paralelos a π son de la forma $x - 2y + 2z + D = 0$, si son tangentes a la esfera su distancia al centro debe ser 5.

$$d(C, \pi') = 5 \rightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 5 \rightarrow \frac{|3 + D|}{3} = 5 \rightarrow |3 + D| = 15 \rightarrow \begin{cases} 3 + D = 15 \rightarrow D = 12 \\ 3 + D = -15 \rightarrow D = -18 \end{cases}$$

Los planos pedidos son $\pi' \equiv x - 2y + 2z + 12 = 0$ y $\pi'' \equiv x - 2y + 2z - 18 = 0$

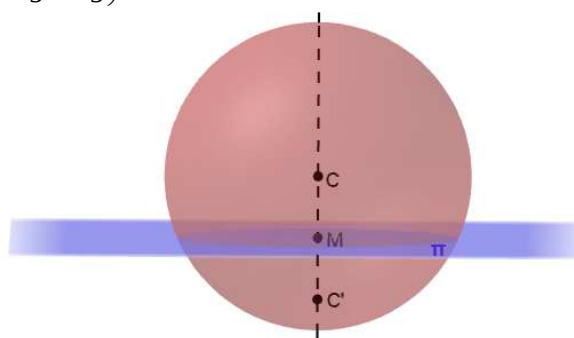


El simétrico de $C(1, 1, 2)$ con respecto a $\pi \equiv x - 2y + 2z + 3 = 0$ estará en la recta perpendicular a π y que pasa por C

$$s \equiv \begin{cases} C(1, 1, 2) \\ \vec{n} = (1, -2, 2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}; \quad M = s \cap \pi \rightarrow \begin{cases} M \in s \rightarrow M(1 + \lambda, 1 - 2\lambda, 2 + 2\lambda) \\ M \in \pi \rightarrow (1 + \lambda) - 2(1 - 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$M\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ es el punto medio entre } C \text{ y su simétrico } C' \rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC'} \rightarrow \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC'} = 2\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right) - (1, 1, 2) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right) \rightarrow C'\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$



BLOQUE DE PROBABILIDAD**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(\bar{B}) = \frac{5}{8}$. Además, sabemos que en un 75% de los casos ocurre alguno de los dos sucesos. Se pide:

- (0,5 puntos) Decidir, razonadamente, si los sucesos A y B son independientes.
- (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B .
- (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que ocurra B y no ocurra A .
- (0,5 puntos) Sabiendo que ha ocurrido A , qué probabilidad hay de que ocurra B .
- (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que no ocurran ninguno de los dos sucesos.

Solución:

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(\bar{B}) = \frac{5}{8} \text{ y } P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Tenemos que } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son sucesos dependientes.}$$

$$\text{La probabilidad de que no ocurra } A \text{ o no ocurra } B \text{ es } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{La probabilidad de que ocurra } B \text{ y no ocurra } A \text{ es } P(B - A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{La probabilidad de que ocurra } B \text{ sabiendo que ha ocurrido } A \text{ es } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos es } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Una caja se ha llenado tirando una moneda al aire tres veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se va a extraer una bola de la caja. Se pide:

- (1,25 puntos) Probabilidad de que la bola extraída sea blanca.
- (1,25 puntos) Si la bola extraída ha sido blanca, calcula la probabilidad de que en la caja no haya quedado otra bola blanca.

Solución:

La caja puede tener cuatro configuraciones diferentes dependiendo del número de caras que salgan.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \{c, c, c\} \rightarrow P(3 \text{ caras}) = \frac{1}{8} \\ \left. \begin{array}{l} \{c, c, +\} \\ \{c, +, c\} \\ \{+, c, c\} \end{array} \right\} \rightarrow P(2 \text{ caras y 1 cruz}) = \frac{3}{8} \\ \left. \begin{array}{l} \{c, +, +\} \\ \{+, c, +\} \\ \{+, +, c\} \end{array} \right\} \rightarrow P(1 \text{ cara y 2 cruces}) = \frac{3}{8} \\ \{+, +, +\} \rightarrow P(3 \text{ cruces}) = \frac{1}{8} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes posibilidades:

También se puede tratar como una Binomial $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ para calcular la probabilidad de tener cada configuración de caja

$$C_1 = \{3 \text{ Blancas}\} \Rightarrow P(C_1) = P(3 \text{ caras}) = P(x=3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$C_2 = \{2 \text{ Blancas y 1 Negra}\} \Rightarrow P(C_2) = P(2 \text{ caras}) = P(x=2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$C_3 = \{1 \text{ Blanca y 2 Negra}\} \Rightarrow P(C_3) = P(1 \text{ cara}) = P(x=1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$C_4 = \{3 \text{ Negras}\} \Rightarrow P(C_4) = P(0 \text{ caras}) = P(x=0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad de extraer blanca es } P(B) &= P(C_1) \cdot P(B/C_1) + P(C_2) \cdot P(B/C_2) + P(C_3) \cdot P(B/C_3) + P(C_4) \cdot P(B/C_4) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot 0 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si la bola ha sido blanca, la probabilidad de que no queden blancas en la caja es la probabilidad de estar en la caja 3

$$P(C_3/B) = \frac{P(B \cap C_3)}{P(B)} = \frac{P(C_3) \cdot P(B/C_3)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 6. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

En un examen de tipo test para cada pregunta se ofrecen cuatro posibles respuestas, de las que solamente una es correcta. El examen estará aprobado cuando se respondan de forma correcta al menos el 70 % de las preguntas. Si un estudiante responde todas las preguntas al azar,

- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe un examen con 10 preguntas?
- (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga 20 aciertos o menos en un examen con 50 preguntas?
- (0,75 puntos) Si el examen tiene 50 preguntas, ¿qué probabilidad hay de que acierte un número de preguntas mayor que 4 y menor que 16?

Solución:

La probabilidad de aprobar un examen con 10 preguntas la podemos calcular con una binomial $B\left(10, \frac{1}{4}\right)$

$$P(\text{aprobar}) = P(x \geq 7) = P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) = \\ = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 0,0035$$

Si hay 50 preguntas, para calcular $P(x \leq 20)$ debemos aproximar por una Normal. Como $B\left(50, \frac{1}{4}\right) \rightarrow \begin{cases} n > 30 \\ n \cdot p = 12,5 > 5 \end{cases}$

$$\text{la aproximación será muy buena. } B\left(50, \frac{1}{4}\right) \rightarrow \begin{cases} \mu = n \cdot p = 50 \cdot \frac{1}{4} = 12,5 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \approx 3,06 \end{cases} \xrightarrow{\text{aproximamos con}} N(12,5 ; 3,06)$$

$$P(x \leq 20) = P(x' < 20,5) = P\left(z < \frac{20,5 - 12,5}{3,06}\right) = P(z < 2,61) = 0,9955$$

$$P(4 < x < 16) = P(4,5 < x' < 15,5) = P(x' < 15,5) - P(x' < 4,5) = \\ = P\left(z < \frac{15,5 - 12,5}{3,06}\right) - P\left(z < \frac{4,5 - 12,5}{3,06}\right) = P(z < 0,98) - P(z < -2,61) = P(z < 0,98) - [1 - P(z < 2,61)] = \\ = 0,8365 - (1 - 0,9955) = 0,832$$