

Examen A De los 5 ejercicios propuestos hay que hacer 4.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, a, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, a, 1)$, $u_3 = (a, 1, -1, 1)$ y $u_4 = (-1, 1, 1, a)$.

- (1,5 puntos) Según los valores del parámetro a , encuentra la dimensión y una base del subespacio generado por $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.
- (0,5 puntos) Para $a = 1$, encuentra un vector, distinto de los dados, que pertenezca al subespacio.
- (0,5 puntos) Para $a = -1$, escribe las coordenadas del vector u_1 expresadas en una base del subespacio.

Solución:

La dimensión del subespacio vectorial generado por una serie de vectores va ligada al número de vectores linealmente independientes que tengamos. Llamamos S al subespacio generado por $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

Veamos cuántos vectores son linealmente independientes entre u_1, u_2, u_3 y u_4 , según los valores del parámetro a .

Para ello, los colocamos en una matriz y estudiamos su rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \text{Como la matriz es cuadrada y tenemos un parámetro, calculamos su determinante:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1+F_2} \begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3-C_1} \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1-a & 1 \\ 1 & a & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & a \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ a & -2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ a & -2 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3-C_1} =$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 0 \\ a & -2 & 1-a \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a+1)^2 \begin{vmatrix} 1-a & 0 \\ -2 & 1-a \end{vmatrix} = (a+1)^2 (1-a)^2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow (a+1)^2 (1-a)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow \text{Rang } A = 4 \Rightarrow \text{Hay 4 vectores linealmente independientes} \Rightarrow \dim S = 4, S = \mathbb{R}^4$ y una base $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$$\text{Si } a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Menor de orden 2: } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \\ \text{Menor de orden 3: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 3 \Rightarrow \dim S = 3 \text{ y } B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$\text{Si } a = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Menor de orden 2: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \\ \text{Como } \begin{cases} F_1 = -F_2 \\ F_3 = -F_4 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 2 \end{cases} \Rightarrow \dim S = 2 \text{ y } B = \{u_3, u_4\}$$

Si $a = 1$, una base de S es $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y un vector pertenece a S si es combinación lineal de u_1, u_2 y $u_3 \Rightarrow e_1 = u_1 + u_2 \in S \Rightarrow e_1 = (0, 2, 2, 0)$

Si $a = -1$, una base de S es $B = \{u_3, u_4\} \Rightarrow u_1 = \alpha \cdot u_3 + \beta \cdot u_4 \Rightarrow (1, -1, 1, -1) = \alpha \cdot (-1, 1, -1, 1) + \beta \cdot (-1, 1, 1, -1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = (-1, 0) \text{ en } B$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 66 & 46 \\ -23 & -16 \end{pmatrix}$, encuentra X tal que $A \cdot (X + C) \cdot B = D$

Solución:

Hay que resolver la ecuación $A \cdot (X + C) \cdot B = D$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_2} \cdot (X + C) \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I_2} = A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1} \Rightarrow X + C = A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1} - C$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2 \rightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} A_{11} = -2 & A_{21} = -6 \\ A_{12} = 1 & A_{22} = 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -1 \rightarrow \text{Adj}(B^T) = \begin{pmatrix} B_{11} = 2 & B_{21} = -5 \\ B_{12} = -3 & B_{22} = 7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1} - C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 66 & 46 \\ -23 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a-1 & 1 & 1 \\ a^2-a & a & a-1 \end{pmatrix}$,

- (1 punto) Determina los valores de a para los cuales son invertibles las matrices A y A^3 .
- (1,5 puntos) Para $a = 1$, calcula, si es posible, la matriz $(A^T \cdot A^{-1})$.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a-1 & 1 & 1 \\ a^2-a & a & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a-1 & 1 & 1 \\ a^2-a & a & a-1 \end{vmatrix}_{C_2=C_2-C_3} = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a-1 & 0 & 1 \\ a^2-a & 1 & a-1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}_{C_2=C_2-C_1} = - \begin{vmatrix} a & 0 \\ a-1 & 2-a \end{vmatrix} = -a(2-a)$$

$$|A| = a(a-2) \rightarrow |A| = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

$$A \text{ es invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ es invertible} \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ y } a \neq 2$$

$$A^3 \text{ es invertible} \Leftrightarrow |A^3| \neq 0; |A^3| = |A|^3 \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A^3 \text{ es invertible} \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ y } a \neq 2$$

$$\text{Si } a=1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot (1-2) = -1 \rightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 & A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 6 \\ 2 & y & 0 \\ 3 & z & 3 \end{pmatrix}$, sabemos que $|A| = -3$. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$|-A^T|; \quad |(A^2)^{-1}|; \quad |(2A)^2|; \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2; \quad \begin{vmatrix} 3y+4 & 3x+2 & 3z+6 \\ y & x+6 & z+3 \\ 2y & 2x & 2z \end{vmatrix}.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 6 \\ 2 & y & 0 \\ 3 & z & 3 \end{pmatrix} \text{ y } |A| = 3 \rightarrow \begin{cases} |-A^T| = (-1)^3 \cdot |A^T| = -|A^T| = -|A| = -3 \\ |(A^2)^{-1}| = \frac{1}{|A^2|} = \frac{1}{|A \cdot A|} = \frac{1}{|A| \cdot |A|} = \frac{1}{9} \\ |(2A)^2| = |2A| \cdot |2A| = |2A|^2 = [2^3 \cdot |A|]^2 = 24^2 = 576 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = \left(\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)^2 = \left(3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)^2 = \left(\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right)^2 = \left(\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & 2 & 0 \\ z & 3 & 3 \end{vmatrix} \right)^2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & x & 6 \\ -2 & y & 0 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix} \right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 3y+4 & 3x+2 & 3z+6 \\ y & x+6 & z+3 \\ 2y & 2x & 2z \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3y+4 & 3x+2 & 3z+6 \\ y & x+6 & z+3 \\ y & x & z \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_3 \\ F_3=F_3-3F_1}]{F_2=F_2-F_3} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \\ y & x & z \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & y \\ 2 & 6 & x \\ 6 & 3 & z \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 & x \\ 4 & 0 & y \\ 6 & 3 & z \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 6 \\ 2 & y & 0 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

(1,5 puntos) Sea $A \in M_{n \times n}$ una matriz que cumple $(A - 2I)^2 = 0$. Prueba que $|A| \neq 0$.

(1 punto) Encuentra todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, tales que cumplan la relación $(A - 2I)^2 = 0$.

Solución:

$$A \in M_{n \times n}; \quad (A - 2I)^2 = 0 \Rightarrow (A - 2I)(A - 2I) = 0 \Rightarrow A^2 - 2A \cdot I - 2I \cdot A + 4I^2 = 0 \Rightarrow A^2 - 4A + 4I = 0 \Rightarrow 4A - A^2 = 4I$$

$$A - \frac{1}{4}A^2 = I \Rightarrow A \cdot \left(I - \frac{1}{4}A\right) = I \Rightarrow I - \frac{1}{4}A = A^{-1} \Rightarrow A \text{ tiene inversa} \Rightarrow |A| \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}; \quad A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}; \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & 0 \\ 0 & 1+ab \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+ab & 0 \\ 0 & 1+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1+ab = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{a} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

Examen B De los 5 ejercicios propuestos hay que hacer 4.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, -2, -1, 2)$, $u_2 = (2, -1, -1, 3)$ y $u_3 = (1, 4, 1, 0)$.

- (1 punto) Encuentra la dimensión y una base del subespacio vectorial S , generado por $\{u_1, u_2, u_3\}$.
- (1 punto) Comprueba si alguno de los vectores $e_1 = (1, 1, 0, 2)$ y $e_2 = (0, -3, -1, 1)$ pertenece al subespacio S y, en caso afirmativo, escribe las coordenadas del vector en la base del subespacio.
- (0,5 puntos) Encuentra un vector, distinto de los dados, que pertenezca al subespacio S .

Solución:

El subespacio vectorial generado por tres vectores está formado por los infinitos vectores que pueden obtenerse como combinación lineal de esos tres vectores. El número de vectores, de esos tres, que son linealmente independientes, nos da la dimensión del subespacio. Cualquier sistema de vectores del subespacio, que esté formado por un número de vectores linealmente independientes igual a la dimensión del subespacio, serán base de ese subespacio.

Veamos cuántos vectores son linealmente independientes entre u_1 , u_2 y u_3 . Los colocamos en una matriz y estudiamos su rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Menor de orden 2 distinto de cero } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \\ \text{Menores de orden 3: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rango de la matriz } 2$$

Hay dos vectores linealmente independientes $\Rightarrow \dim S = 2$ y una base, por ejemplo, sería $B = \{u_1, u_2\}$

Para comprobar si un vector pertenece al subespacio, hay que ver si se puede poner como combinación lineal de u_1 y u_2 , es decir, si depende linealmente de u_1 y u_2 . Volvemos a usar una matriz:

$$\text{Para } e_1 = (1, 1, 0, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Menor de orden 2 distinto de cero } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \\ \text{Menores de orden 3: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rango } 3$$

e_1 es linealmente independiente con u_1 y $u_2 \Rightarrow e_1 \notin S$

$$\text{Para } e_2 = (0, -3, -1, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Menor de orden 2 distinto de cero } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \\ \text{Menores de orden 3: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rango } 2$$

e_2 depende linealmente de u_1 y $u_2 \Rightarrow e_2 \in S \Rightarrow e_2 = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \Rightarrow (0, -3, -1, 1) = \alpha_1 \cdot (1, -2, -1, 2) + \alpha_2 \cdot (2, -1, -1, 3)$

$$(0, -3, -1, 1) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, -2\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 = -3 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow e_2 = 2u_1 - u_2 \Rightarrow e_2 = (2, -1) \text{ en } B.$$

Para encontrar otro vector que pertenezca al subespacio, sólo tenemos que formar una combinación lineal de u_1 y u_2 que nos dé un vector diferente a los que teníamos. Por ejemplo: $e_3 = u_1 + u_2 \Rightarrow e_3 = (3, -3, -2, 5) \in S$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra X tal que $A^{-1} \cdot X = B \cdot A^{-1}$

Solución:

Hay que resolver la ecuación $A^{-1} \cdot X = B \cdot A^{-1} \Rightarrow \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_3} \cdot X = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -1 \rightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 & A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 & A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 3 \\ 1 & 1 & m & m \end{pmatrix}$,

- (2 puntos) Estudia el rango de la matriz A según los valores del parámetro m .
- (0,5 puntos) Para $m = 2$, calcula el determinante de la matriz A^3 .

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 3 \\ 1 & 1 & m & m \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3-C_4} \begin{vmatrix} m & 1 & 0 & 1 \\ m & m & 0 & 1 \\ 1 & m & m-3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollamos por la } C_3} = (m-3)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-C_2} = (m-3) \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollamos por la } C_1} =$$

$$= (m-3)(m-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m-3)(m-1)(m^2-1) = (m-3)(m-1)^2(m+1)$$

$$|A|=0 \Rightarrow (m-3)(m-1)^2(m+1)=0 \Rightarrow \{m=3, m=1, m=-1\} \Rightarrow \text{Si } m \neq 3, m \neq 1 \text{ y } m \neq -1, \text{ Rang } A = 4$$

$$\text{Si } m=3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3=C_4} \begin{cases} \text{menor de orden 2} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \text{menor de orden 3} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 3$$

$$\text{Si } m=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1=C_2=C_3} \begin{cases} \text{menor de orden 2} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 2$$

$$\text{Si } m=-1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3=-C_1} \begin{cases} \text{menor de orden 2} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \\ \text{menor de orden 3} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 3$$

$$\text{En resumen, } \begin{cases} \text{si } m \neq 3, m \neq 1 \text{ y } m \neq -1, \text{ Rang } A = 4 \\ \text{si } m = 3 \text{ o } m = -1, \text{ Rang } A = 3 \\ \text{si } m = 1, \text{ Rang } A = 2 \end{cases}$$

$$|A| = (m-3)(m-1)^2(m+1) ; \text{ si } m=2 \Rightarrow |A| = (-1) \cdot 1^2 \cdot 3 = -3 \text{ y } |A^3| = |A|^3 = (-3)^3 = -27$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea $A \in M_{4 \times 4}$ una matriz que cumple $2A^2 + 2A + I = 0$.

- (1,5 puntos) Calcula A^4 y $|A|$.
- (1 punto) Encuentra, en función de $|A|$, el determinante de las matrices $(-A^T)^{-1}$ y $A + I$.

Solución:

$$A \in M_{4 \times 4} \text{ y } 2A^2 + 2A + I = 0 \quad ; \quad 2A^2 = -2A - I \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2}(-2A - I) \Rightarrow A^2 = -A - \frac{1}{2}I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \left(-A - \frac{1}{2}I\right) \cdot \left(-A - \frac{1}{2}I\right) = A^2 + \frac{1}{2}AI + \frac{1}{2}IA + \frac{1}{4}I^2 = \left(-A - \frac{1}{2}I\right) + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}I = -\frac{1}{4}I$$

$$A^4 = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow |A^4| = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \Rightarrow |A^4| = |A|^4 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \Rightarrow |A| = \sqrt[4]{\left(-\frac{1}{4}\right)^4} \Rightarrow \begin{cases} |A| = \frac{1}{4} \\ |A| = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\left|(-A^T)^{-1}\right| = \frac{1}{|-A^T|} = \frac{1}{(-1)^4 |A^T|} = \frac{1}{|A|} \quad ; \text{ si consideramos que } |A| = \frac{1}{4} \Rightarrow \left|(-A^T)^{-1}\right| = 4$$

$$\text{Como } 2A^2 + 2A + I = 0 \Rightarrow -2A^2 - 2A = I \Rightarrow -2A(A + I) = I \Rightarrow A + I = (-2A)^{-1}$$

$$\text{Entonces, } |A + I| = \left|(-2A)^{-1}\right| = \frac{1}{|-2A|} = \frac{1}{(-2)^4 \cdot |A|} = \frac{1}{16 \cdot |A|} \quad ; \text{ si consideramos que } |A| = \frac{1}{4} \Rightarrow |A + I| = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

- (1 punto) Encuentra todas las matrices cuadradas de orden 2 que cumplen la igualdad $A^2 = I$.
- (0,5 puntos) Prueba que las matrices del apartado anterior verifican que $A^{-1} = A$.
- (1 punto) Una matriz es ortogonal cuando $A^{-1} = A^T$. Usando los apartados anteriores, encuentra una matriz ortogonal de orden 2.

Solución:

$$A \in M_{2 \times 2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}; \quad A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \rightarrow b(a + d) = 0 \rightarrow b = 0 \text{ o } a = -d \\ ac + cd = 0 \rightarrow c(a + d) = 0 \rightarrow c = 0 \text{ o } a = -d \\ bc + d^2 = 1 \end{cases} \quad \text{si } b \neq 0 \text{ y } c \neq 0 \Rightarrow a = -d \Rightarrow a^2 = d^2 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1-a^2}{b} \\ b = \frac{1-a^2}{c} \end{cases}$$

Pero si $\begin{cases} b \neq 0, c = 0 \Rightarrow a^2 = d^2 = 1 \\ b = 0, c \neq 0 \Rightarrow a^2 = d^2 = 1 \\ b = 0, c = 0 \Rightarrow a^2 = d^2 = 1 \end{cases}$. Entonces, todas las matrices que cumplen la condición $A^2 = I$ son:

$$\begin{cases} \text{Si } b = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \\ \text{Si } b \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si $A^2 = I \Rightarrow |A^2| = |I| \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$ tiene inversa. Entonces $A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot I \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot A = A^{-1} \Rightarrow A = A^{-1}$

Una matriz es ortogonal cuando $A^{-1} = A^T$; las matrices que cumplen que $A^2 = I$, también verifican que $A^{-1} = A$. Las matrices simétricas verifican $A = A^T \Rightarrow$ Una matriz simétrica de orden 2 tal que $A^2 = I$, es ortogonal. Por ejemplo:

Son ortogonales: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \rightarrow b = \frac{1-a^2}{b} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1-a^2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}$ es ortogonal. Así, también son

ortogonales las matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}; \dots$