uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	H

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cúbicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.

b) (0.75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$.

c) (0.5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(-1,2,6)$, el plano $\pi : 3x-2y+z-5=0$ y la recta $s \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-0}{-1}$:

a) (1.5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π.

b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6.7 y de desviación típica 1.25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7.5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7.5, que el servicio es excelente.

a) (0.75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?

b) (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?

c) (0.75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar X, Y y X^{-1}.

b) (1 punto) Calcular A^{127}.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$.

a) (1.5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En el punto $A(1,0,-1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3,1,0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano $\pi : \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 2+2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.

b) (0.75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

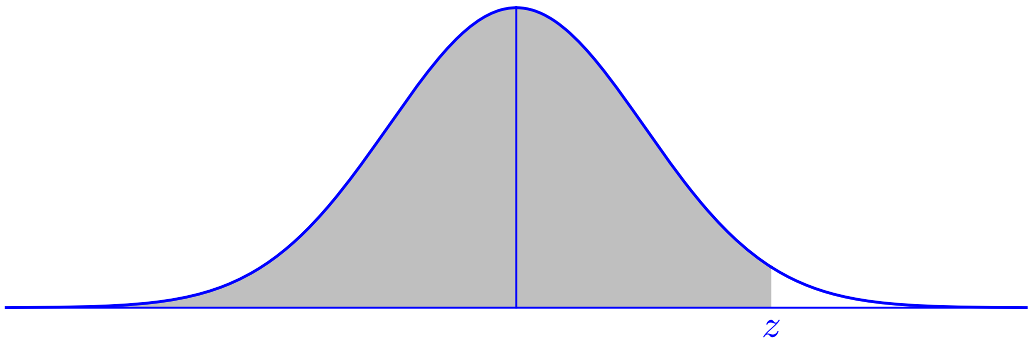
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en franceś o inglés, de tres categorías: el $50\,\%$ son cuentos infantiles, el $30\,\%$, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.

b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Cada ecuación bien escrita: 0.5 puntos. Resolución correcta del sistema: 0.75 puntos (si se resuelve correctamente un sistema incorrecto, se podrán dar hasta 0.5 puntos). Respuesta a la pregunta del problema: 0.25 puntos.

A.2.

a) Dominio: 0.25 puntos. Asíntota vertical: 0.25 puntos. Asíntota oblicua: 0.5 puntos. Inexistencia de asíntotas horizontales: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Conclusión: 0.25 puntos.

A.3.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Obtención correcta de la recta pedida: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

B.1.

a) Por cada una de las soluciones de X, Y, X^{-1}: 0.5 puntos (planteamiento 0.25 puntos, resolución 0.25 puntos).
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

B.2.

a) Cálculo de la derivada: 0.5 puntos. Monotonía: 0.5 puntos. Extremos relativos 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolver la integral: 0.5 puntos.

B.3.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Obtención de una ecuación del plano: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Obtención de P: 0.25 puntos. Obtención de la distancia: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Obtención del ángulo: 0.25 puntos.

B.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Probabilidad de que el libro esté en francés: 0.75 puntos (planteamiento 0.5 puntos, resolución 0.25 puntos). Probabilidad de que si el libro está en inglés sea una novela histórica: 0.5 puntos (planteamiento 0.25 puntos, resolución 0.25 puntos).

MATEMÁTICAS II – SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

Sean x, y, z las dimensiones del ancho, largo y alto del ortoedro respectivamente, medidas en metros. El sistema que se deduce del enunciado es

$$\left.\begin{array}{rcr} x-2y+z & = & 2 \\ x-y-z & = & -8 \\ 2(x+y) & = & 54 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes tiene determinante igual a 10. Es un sistema compatible determinado. La solución es $x = 15$, $y = 12$, $z = 11$. La respuesta al problema es $15 \cdot 12 \cdot 11 = 1980$ cajas.

A.2.

a) Puesto que f es un cociente de funciones polinómicas, estará definida y será continua siempre que no se anule el denominador, $x^2 - 1$. Por tanto, Dom$(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Puesto que $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \infty$, hay una asíntota vertical en $x = -1$. Pero $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2}{2x} = \dfrac{3}{2}$, por lo que no hay asíntota vertical en $x = 1$. Además

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x-1}{x^2-1} = x + \frac{1}{x+1},$$

por lo que hay una asíntota oblicua, $y = x$, para $x \to \pm\infty$. Se deduce de ello que no hay asíntotas horizontales.

b) Puesto que $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$, la derivada de f es $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Para $x = 2$, se tiene que $f'(2) = \frac{8}{9}$. Por lo tanto, la recta tangente buscada es $y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}(x-2)$.

c) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ es $f'(x_0)$. Puesto que $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$, no es posible encontrar x_0 tal que $f'(x_0) = 1$, ya que en ese caso sería $\dfrac{1}{(x_0+1)^2} = 0$, que es imposible.

A.3.

a) Es suficiente calcular el vector director de la recta solución r. El vector normal al plano es $\overrightarrow{n_\pi} = (3, -2, 1)$. El punto genérico de la recta s es $P_s(-1+2\alpha, 2+\alpha, -\alpha)$. El vector $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PP_s}$ es perpendicular al vector normal al plano, por lo que el producto escalar es cero: $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$. Así se obtiene el punto de intersección de la recta s con la recta pedida, $(3, 4, -2)$. Calculamos $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PP_s} = (2, 1, -4)$. La ecuación paramétrica de la recta pedida es: $(x, y, z) = (-1+2\alpha, 2+\alpha, 6-4\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) La recta t perpendicular al plano dado es $t \equiv (x, y, z) = (-1+3\alpha, 2-2\alpha, 6+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. El punto $Q = t \cap \pi$ es $\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{8}{7}, \dfrac{45}{7}\right)$. Puesto que Q es el punto medio de P y su simétrico, las coordenadas del simétrico son $\left(\dfrac{11}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{48}{7}\right)$.

A.4.

Sea $X =$ "nota global otorgada al servicio por un usuario".
a) La probabilidad pedida es $P(X > 7.5) = P(Z > 0.64) \approx 0.2611$.
b) La probabilidad pedida es $P(5 \le X \le 7.5) = P(-1.36 \le Z \le 0.64) \approx 0.652$.
c) Sea $T =$"número de entre 25 usuarios elegidos al azar que consideran el servicio insatisfactorio". T se rige por una binomial con $p \approx 0.0869$ ($1 - 0.2611 - 0.652 = 0.0869$), y $n = 25$. Por lo tanto,

$$P(T \ge 2) = 1 - P(T=0) - P(T=1) \approx 1 - (1-0.0869)^{25} - 25 \cdot 0.0869 \cdot (1-0.0869)^{24} \approx 0.6518.$$

B.1.

a) Resolviendo el sistema matricial, por ejemplo por reducción en Y, se obtienen las matrices X e Y:
$X = \frac{1}{13}(2A+B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \frac{1}{3}(5X - A) = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}$.
Finalmente se obtiene que $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se observa que $A^2 = -I_2$ y por tanto $A^{127} = (A^2)^{63}A = (-I_2)^{63}A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

B.2.

a) La función $f(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$, por ser división de funciones continuas donde no se anula el denominador, además tiene simetría par. Para $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, por lo que que $f(x)$ es creciente si $0 < x < 1$ y decreciente si $x > 1$. Por simetría, f también es creciente si $x < -1$ y decreciente si $-1 < x < 0$. Por lo tanto f alcanza un mínimo relativo en $x = 0$ y dos máximos relativos en $x = \pm 1$.
b) $f(x) = \frac{1}{2}$ para $x = \pm 1$, donde se alcanzan los máximos, por tanto $f(x) \leq \frac{1}{2}$ y por la simetría, tenemos que el área va estar dada por:

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{|x|}{x^2+1} \right) dx = 2 \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left[x - \ln\left(x^2+1\right) \right]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

B.3.

a) El plano de incidencia contiene al punto $A = (1, 0, -1)$ y tiene como vectores directores el normal al plano π, $\vec{n} = (-1, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, -1, -1)$, y el vector $\overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 0, -1) = (2, 1, 1)$, por lo que dicho plano será $(x, y, z) = (1 + \alpha + 2\beta, \alpha + \beta, -1 + \alpha + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
b) El punto P es la intersección de la recta que pasa por A y tiene vector director $\overrightarrow{AB}$, $(x, y, z) = (1+2\alpha, \alpha, -1+\alpha)$, con el plano π, $x + y + z = 4$. Así, $P(3, 1, 0)$ por lo que la distancia desde el emisor hasta P es $d = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{6}$.
c) Para que la distancia sea mínima, la luz debe incidir perpendicularmente. Así, el emisor debe girar el ángulo que forman la normal del plano π y el vector $\overrightarrow{AB}$, $\alpha = \arccos\left(\frac{|(-1,-1,-1) \cdot (2,1,1)|}{\|(-1,-1,-1)\| \|(2,1,1)\|} \right) = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 19.5^o$.

B.4.

Con la notación FR para libros en francés, IN, en inglés, C, cuentos infantiles, NH, novelas históricas y MT para manuales técnicos se tiene: $P(\text{C}) = 0.5$, $P(\text{NH}) = 0.3$, $P(\text{MT}) = 0.2$, $P(\text{FR}|\text{C}) = \frac{1}{5} = 0.2$, $P(\text{IN}|\text{C}) = \frac{4}{5} = 0.8$, $P(\text{IN}|\text{NH}) = \frac{1}{3}$, $P(\text{FR}|\text{NH}) = \frac{2}{3}$ y $P(\text{MT}|\text{FR}) = \frac{1}{7}$.
a) Por la definición de probabilidad condicionada y puesto que $\overline{\text{MT}} = \text{C} \cup \text{NH}$ (unión de incompatibles) se tiene

$$P(\text{FR}|\overline{\text{MT}}) = \frac{P(\text{FR} \cap \overline{\text{MT}})}{P(\overline{\text{MT}})} = \frac{P(\text{FR} \cap \text{C}) + P(\text{FR} \cap \text{NH})}{P(\overline{\text{MT}})} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0.5 + \frac{2}{3} \cdot 0.3}{1 - 0.2} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

b) Aplicando la regla de probabilidad total y las identidades $P(\text{FR}|\text{MT}) \cdot P(\text{MT}) = P(\text{FR} \cap \text{MT}) = P(\text{MT}|\text{FR}) \cdot P(\text{FR})$, se tiene $P(\text{FR}) = P(\text{FR}|\text{C}) \cdot P(\text{C}) + P(\text{FR}|\text{NH}) \cdot P(\text{NH}) + P(\text{FR}|\text{MT}) \cdot P(\text{MT})$ y así

$$P(\text{FR}) = \frac{1}{5} \cdot 0.5 + \frac{2}{3} \cdot 0.3 + \frac{1}{7} \cdot P(\text{FR}), \quad \text{de donde } P(\text{FR}) = \frac{7}{20} = 0.35.$$

Finalmente, por la regla de Bayes, $P(\text{NH}|\text{IN}) = \dfrac{P(\text{IN}|\text{NH}) \cdot P(\text{NH})}{P(\text{IN})} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 0.3}{\frac{13}{20}} = \dfrac{2}{13}$.