EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN

1. Descomponer el número 100 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más tres veces el cuadrado del segundo sea mínimo.

2. Un alambre de longitud 1 se divide en dos partes, no necesariamente iguales, para construir un cuadrado y una circunferencia. Probar que de todas las posibilidades, la que encierra un área total mínima surge cuando el radio del círculo es la mitad que el lado del cuadrado.

3. En la parábola $y^2 = 4x$ hallar los puntos que tienen distancia mínima del punto (4,0).

4. ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 8 m. de radio?

5. De todas las rectas que pasan por el punto (2,3), ¿cuál determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima?

6. Hallar la longitud de los lados de un triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea 60 m.

7. De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de radio R, ¿cuál es el de mayor área?

8. De todos los rectángulos que tienen área igual a 16 m^2, ¿qué dimensiones tiene el de menor perímetro?

9. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, los márgenes inferior y superior han de tener 2 cm cada uno, y los laterales 1 cm. ¿Con qué dimensiones de la hoja es mínimo el gasto de papel?

10. De todos los triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa, hallar los catetos del que posee área máxima.

11. ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?

12. Se quiere construir un cilindro de área total 5 dm^2, incluidas las bases, y volumen máximo. Calcula las dimensiones del mismo.

13. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en el semicírculo determinado por $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$.

14. Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$. Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

15. Cuál es el cono de mayor volumen entre los que pueden inscribirse en una esfera de radio 12 cm.

16. Calcúlense las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos los que pueden inscribirse en una esfera de radio R.

17. Una pista de atletismo está formada por una región rectangular con un semicírculo en cada extremo. Si el perímetro es de 200 metros, hallar las dimensiones de la pista para que el área de la zona rectangular sea máxima.

18. De todos los conos cuya generatriz mide 10 cm, ¿cuál es el de mayor volumen?

19. De una cartulina rectangular de dimensiones a y b se recortan cuatro cuadrados iguales, uno en cada esquina, y con la superficie resultante se construye una caja. ¿Cómo deben hacerse los recortes para conseguir que la caja tenga volumen máximo?

20. De un disco metálico se recorta un sector circular para formar un vaso cónico. ¿Cuál debe ser, en radianes, el ángulo del sector recortado para que el vaso tenga volumen máximo?

21. Se considera un cilindro cuya altura es igual al diámetro de la base; ¿cuál de los conos circunscritos al mismo tiene menor volumen?. (Se supone que la base del cono contiene a la del cilindro)

22. Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 4$ y un punto (p, q) sobre ella con $0 \le p \le 2$. Formamos un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos $(0,0)$ y (p, q). Calcula (p, q) para que el área de ese rectángulo sea máxima.

23. Se considera un círculo de radio r.
    - Probar que el rectángulo de área máxima inscrito en el círculo dado es un cuadrado.
    - Considerando el círculo inscrito en dicho cuadrado, calcular el cociente entre las áreas de los dos círculos.

24. De un triángulo ABC se conoce el lado c y la altura correspondiente a ese lado. ¿Cuáles han de ser las longitudes de los otros dos lados para que el ángulo C sea máximo?

25. Hállense los lados de un trapecio isósceles de área mínima entre todos los circunscritos a una circunferencia de 1 m de radio.

26. De un trapecio isósceles se conoce la base menor, b, y la longitud, c, de los lados no paralelos. Hállese el valor máximo de su área.

27. Un triángulo rectángulo gira alrededor de su hipotenusa, que mide 6 cm. Hállese la altura del mismo para que la diferencia de volúmenes de los conos engendrados sea máxima.

28. De todos los conos de área lateral 2π dm^2, ¿cuál es el de volumen máximo?

29. Un recipiente abierto está formado por un cilindro terminado en su parte inferior por una semiesfera (el espesor de la pared es constante). ¿Qué dimensiones deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su capacidad, se gaste en hacerlo la menor cantidad de material?

30. Una hoja de lata de anchura a debe ser curvada longitudinalmente en forma de canalón abierto. ¿Qué ángulo central debe tomarse para que el canalón tenga la mayor capacidad posible?

31. Se traza un segmento desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde allí otro a $(1, b)$. Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos que forman los segmentos con el eje horizontal sean iguales.

32. Determinar la altura mínima h que puede tener la puerta de una torre vertical para que a través de ella se pueda introducir en la torre una barra rígida de longitud l, cuyo extremo resbalará a lo largo del suelo. La anchura de la torre es $d < l$.