MATRICES

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}; \text{ obtener } A^2,\ B^2,\ A^3,\ B^3,\ AB-BA\ \ y\ \ (A+B)(A-B).$$

2. Obtener todas las matrices cuadradas de orden dos, tales que $A^2 = I_2$.

3. Obtener todas las matrices cuadradas de orden dos, tales que $A \neq 0$ y $A^2 = 0$.

4. Hallar todas las matrices que conmutan con $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

5. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, calcular A^n.

6. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, calcular A^n.

7. Sea $A=\begin{pmatrix}cos\alpha & sen\alpha\\ -sen\alpha & cos\alpha\end{pmatrix}$, obtener $A+A^t$, $A-A^t$, A^2 y A^n.

8. Encontrar las matrices X e Y que verifiquen:

$$\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}\\ 2X+Y=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$$

9. Calcular la matriz X que verifique $XA=B^2$; siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

10. Hallar la matriz X que verifique $XA+B=C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

11. Determinar las matrices X e Y sabiendo que: $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ 3Y-X=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -12 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

12. Hallar todas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2=A$. Para una cualquiera de las matrices obtenidas, calcular $M=A+A^2+.....+A^{10}$.

13. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=AB$.

14. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $AB=-BA$.

15. Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2+BA=A^2$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXB=I$.

17. Se sabe que la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ verifica la igualdad $A^2=A+I$, siendo I la matriz identidad. Calcular A^{-1} y A^4.

18. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1}=B$.

19. Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

20. Sea k un número natural y sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcular A^k y hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = BC$.

21. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB=BA$. Para $a=b=c=1$, calcular B^{10}.

22. Para cada número entero n, se considera la matriz $A_n=\begin{pmatrix} cos\,nx & sen\,nx \\ -sen\,nx & cos\,nx \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

Comprobar que $A_n \cdot A_m = A_{n+m}$ y como aplicación calcular A_n^{-1}.

23. Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprobar que $A^2=2A-I$. Determinar la matriz inversa de A y la matriz A^8.

24. Resolver la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$.

25. Calcular los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

26. Determinar todas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea $2I-A$, donde $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

28. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A-\lambda I)^2$ sea la matriz nula.

29. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $(A-I)^2$ y haciendo uso del resultado calcular A^4 .

30. Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2-2M=3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n . Se pide:

- Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I .
- Expresar M^3 como combinación lineal de M e I .
- Hallar todas las matrices de la forma $M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

31. Hallar todas las matrices X tales que $XA=AX$, siendo A la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2=I$, siendo I la matriz identidad de orden n . Se pide:

- Expresar A^{-1} en términos de A .
- Expresar A^n en términos de A e I , para cualquier número natural n .
- Calcular a para que $A^2=I$, siendo A la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

33. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:

- Comprobar que se verifica la igualdad $A^3+I=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula.
- Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1} .
- Calcular A^{100} .

34. Hallar las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, que cumplan $A^3=A$.

35. Se sabe que una matriz no nula A verifica $A^2 = A$. Desarrolla la expresión matricial $\left(A-\mu I\right)^3$, siendo I la matriz identidad y μ una constante. Calcular μ sabiendo que se verifican las relaciones $A^2 = A$ y $\left(A-\mu I\right)^3 = A-\mu^3 I$.

36. Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices $B \in M_{2\times 2}$ (distintas de la matriz nula), tales que $B\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix}$

37. Resolver la ecuación matricial $XA = B + C$, donde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

38. Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2 & 4\\ 6 & -5 & -6 & 12\\ 3 & -3 & -2 & 6\\ 3 & -3 & -3 & 7\end{pmatrix}$ verifica $A^2 = A$, determinar un valor no nulo del número real λ tal que $\left(\lambda A - I\right)^2 = I$, siendo I la matriz identidad.