

EJERCICIOS DE CONTINUIDAD, DERIVABILIDAD Y CÁLCULO DE RECTAS TANGENTES

1. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 - ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?
 - ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?
4. Demostrar que la función $f(x) = \ln(1+x^2)$ es inyectiva en el intervalo $[0, +\infty)$. Hallar el dominio y la expresión de la función inversa de $f(x)$. ¿Son ambas continuas?
5. Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \begin{cases} \frac{4x-x^2-3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en el punto $x = 2$.
¿Podríamos obtener la recta tangente en el punto $x = 1$?
6. Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x^2-3}$.
Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.
7. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante. Para cada valor de m , hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas. Hallar, también, el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.
8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$. ¿Para qué valores del parámetro a es continua? ¿Para qué valores de a es derivable?

9. Sea la función $f(x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen} x)^2}$, calcular la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x < \infty \end{cases}$, determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio.
11. Hallar la derivada n -ésima de la función $f(x) = \frac{3}{2x-1}$
12. Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = ax^2 + b$.
- Encontrar los valores de a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto $x = 2$.
 - Para los valores de a y b calculados, hallar la ecuación de la recta tangente común a ambas curvas.
13. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$.
- Estudiar su continuidad y derivabilidad.
 - Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 3.
14. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que : $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. Se pide:
- Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.
 - Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$
15. Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. ¿Es continua en $\mathbb{R}$? ¿Es derivable en $\mathbb{R}$? ¿Alcanza algún extremo?
16. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.
17. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, probar que es derivable y que su función derivada, $f'(x)$, es continua.

18. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

Hallar a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y su primera derivada se anule en $x = 2$.

19. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}.$

Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

20. Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$. Estudiar su continuidad y derivabilidad.

21. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)| \leq x^2$. Demostrar que $f(x)$ es derivable en cero.

22. Sea $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq c \\ ax+b & \text{si } x < c \end{cases}$ donde a , b y c son constantes. Si b y c son números fijos,

hallar todos los valores de a (si existe alguno) para los que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Qué condiciones se tienen que dar para que la función sea derivable en $x = c$. Pon ejemplos.