

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LÍMITES Y TEOREMAS DE CONTINUIDAD

1. Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x .

2. Qué podemos decir sobre la continuidad de la función $f(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{a} (\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{a})$.

3. Razónese que la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^3) \cdot e^{x^2+2}$ es continua.

4. Obtener el valor de k sabiendo que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$.

5. Sea $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x}$, hallar el dominio de f y el valor que debe asignarse a $f(0)$ para que la función esté definida y sea continua en el intervalo cerrado $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

6. La función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + n}{x^3 + mx^2 - 14x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Hállense m, n y todas sus discontinuidades.

7. Probar que la función $y = \frac{x^2 + 1}{3 - \cos x}$ alcanza el valor 2 en algún punto de su dominio.

8. Supongamos que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Probar que $g(c) = f(c)$ para algún número $c \in [a, b]$.

9. Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto, y localizarlo aproximadamente.

10. La ecuación $x^x = 326$ tiene una solución positiva. Hállese dicha solución con una cifra decimal exacta. (La función $f(x) = x^x$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}^+$)

11. La ecuación $x \cdot 2^x = 1$ tiene alguna solución en el intervalo $[0, 1]$. Razónese por qué y hállese la misma con una cifra decimal exacta.

12. Hállese la menor solución positiva de la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ con dos cifras decimales exactas.

13. Demostrar que toda ecuación polinómica de grado impar y coeficientes reales tiene por lo menos una solución real.
14. Sea f una función definida en un entorno del punto $x = a$. ¿Cómo puede expresarse en términos de ε y δ la frase “ f no es continua en $x = a$ ”?
15. Hállense todas las soluciones de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ con una cifra decimal exacta.
16. Dada la función $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$, encontrar los puntos de discontinuidad de f y determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
17. Se considera la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$. Utilizando el Teorema de Bolzano,
- Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.
 - Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.
18. Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^{\frac{1}{n}}}{(x-3)^{\frac{1}{m}}}$ en los siguientes casos:
- Si $m > n$
 - Si $m \leq n$