

LONGITUDES DE CURVAS, VOLUMEN Y SUPERFICIE DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN.

1. Calcular el volumen de la figura de revolución generada, al girar sobre el eje OX, la región plana limitada por las curvas $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$.
2. Determinar el volumen generado al girar respecto al eje OX la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$.
3. Calcular el volumen del cuerpo que se obtiene al hacer girar la curva $y = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ en torno al eje OX, entre $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.
4. Encontrar el volumen de la figura que se obtiene girando la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot e^{-x^2}$ en torno al eje OX, en el intervalo $[-2, 2]$.
5. Se quiere fabricar un candelabro macizo a partir de la figura de revolución determinada por la función $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + 1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 1 & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases}$ al girar sobre el eje OX, cuyas magnitudes vienen expresadas en decímetros. Calcular el precio de dicho objeto, fabricado en cobre de $0,06 \text{ €/cm}^3$.
6. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por la gráfica de la función $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ y la recta $y = 0$.
7. Hallar el volumen del sólido que engendra, al girar alrededor del eje OX, la región comprendida entre dicho eje y la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$.
8. Calcular, mediante una integral, el volumen de la esfera de radio R.
9. Hallar el volumen del cuerpo engendrado, al girar alrededor del eje OY, el recinto plano limitado por la curva $y = x^2$, el eje OY y las rectas $y = 0$ e $y = 4$.
10. Calcular el volumen del cuerpo engendrado, al girar alrededor del eje OY, el recinto plano limitado por la curva $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$ y el eje OY, entre $y = -1$ e $y = 1$.
11. Calcular el volumen del elipsoide generado al girar sobre el eje OX la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- 12.** Calcular el volumen del toro engendrado por la revolución alrededor del eje OX del círculo encerrado por la circunferencia $x^2 + (y - b)^2 = r^2$
- 13.** Calcular la longitud del arco de la curva $y = \frac{x^2}{8} - \ln x$ comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = e$.
- 14.** Calcular la longitud del arco de la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.
- 15.** Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = 4x$ comprendido entre las rectas $y = 0$ e $y = 2$.
- 16.** Hallar la longitud del arco de la curva $(y + 2)^2 = x^3$ comprendido entre los puntos $(0, -2)$ y $(4, 6)$.
- 17.** Calcular la longitud de la curva que tiene por ecuaciones
$$\left. \begin{aligned} x &= 2\cos t - \cos 2t \\ y &= 2\sin t - \sin 2t \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
- 18.** Calcular la longitud de la curva que tiene por ecuaciones
$$\left. \begin{aligned} x &= e^t \cdot \sin t \\ y &= e^t \cdot \cos t \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$
- 19.** Calcular la longitud de la astroide de ecuaciones
$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \cos^3 t \\ y &= a \cdot \sin^3 t \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
- 20.** Si la posición de un móvil en el plano viene dada por el par de funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, donde t representa el tiempo, entonces el espacio recorrido entre los instantes t_0 y t_1 es la longitud del arco definido por esas ecuaciones paramétricas para $t_0 \leq t \leq t_1$. Hállese el camino recorrido por un móvil, entre los instantes $t = 0$ y $t = 2$, si su movimiento viene dado por las ecuaciones:
- a)
$$\left. \begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t^3 \end{aligned} \right\}$$
- b)
$$\left. \begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t - \frac{t^3}{3} \end{aligned} \right\}$$
- 21.** Hallar la longitud de un arco completo de la cicloide
$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$
- 22.** Hallar el área de la superficie engendrada por un giro completo, en torno al eje OX, del arco de la curva $y = x^3$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 2$.
- 23.** Hallar el área de la superficie engendrada por el arco de parábola $y^2 = x$ comprendido entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$, cuando éste gira 2π radianes en torno al eje OX.

- 24.** Calcular el área de la superficie generada al girar, alrededor del eje OX, el lazo de la curva de ecuación $9y^2 = x(3-x)^2$.
- 25.** Demostrar la fórmula del área de una esfera, como superficie de revolución al girar la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ alrededor del eje OX.
- 26.** Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.
- 27.** Determinar el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX la región limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = 2a$.
- 28.** Determinar el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OY la región limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = 2a$.
- 29.** Obtener el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX el triángulo de vértices $A = (1,0)$, $B = (3,0)$ y $C = (2,1)$.
- 30.** Obtener el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX el triángulo de vértices $A = (1,3)$, $B = (3,5)$ y $C = (5,5)$.
- 31.** Determinar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX la región limitada por la parábola $x = (y-5)^2$ y la recta $x = 9$.
- 32.** Determinar el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX el círculo de centro $(0,5)$ y radio $r = 2$.
- 33.** Consideramos el recinto limitado por el eje OX, la curva $y = x \cdot e^x$, y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por un giro completo de ese recinto en torno:
- al eje OX
 - al eje OY
- 34.** Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la región plana limitada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$ alrededor de:
- el eje OX
 - el eje OY