Ejercicio 1.

Estudiar si se verifican las condiciones del teorema de Rolle para la función $f(x)=\dfrac{1}{senx}$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

Ejercicio 2.

¿Se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función $f(x)=|2x-3|-7$ en el intervalo $[-2,5]$?

Ejercicio 3.

Sea función $f(x)=|x|^3+2x^2-1$, ¿cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[-1,1]$? En caso afirmativo hallar los valores garantizados por el teorema.

Ejercicio 4.

Aplicar el teorema del valor medio (de Lagrange) a la función $f(x)=\ln x$ en el intervalo $\left[1,e^2\right]$, determinando el valor de c, $1<c<e^2$, para el que se verifica dicho teorema.

Ejercicio 5.

La función $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$, ¿cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$?

Ejercicio 6.

Calcular a y b para que la función definida de la forma:

$f(x)=\begin{cases} ax+3 & si\ x<1 \\ -x^2+2ax+b & si\ x\geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1,3]$ y determinar el valor intermedio garantizado por el teorema.

Ejercicio 7.

Sea la función definida del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & si\ x\leq 0 \\ -x^2+ax+b & si\ x>0 \end{cases}.$$

Halla los valores de $a\ y\ b$ para que la función sea derivable en $\mathbb{R}$.

Con los valores obtenidos, halla los puntos de la curva $y=f(x)$ en los que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A=(-3,f(-3))\ \ y\ \ B=(2,f(2))$.

Ejercicio 8.

Calcula m, n y b para que la función definida de la forma: $f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+5 & si \quad x<1 \\ 3x+1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2,b]$, y determina el valor intermedio garantizado por el teorema.

Ejercicio 9.

Razónese que sea cual sea el número real c, la ecuación $x^5-5x+c=0$ no puede tener dos soluciones positivas menores que 1.

Ejercicio 10.

Demostrar que la ecuación $x^2=x\cdot senx+\cos x$ no tiene más de dos soluciones reales.

Ejercicio 11.

Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Si todas las raíces de $f(x)$ son reales, demuéstrese que las raíces de $f'(x)$ también son reales.

Ejercicio 12.

Probar que la ecuación $x\cdot e^x=2$ tiene una única raíz en el intervalo $(0,1)$.

Ejercicio 13.

Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2+kh+h}{x^2-h}$. ¿Para qué valores de k y h verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[-1,1]$?

Ejercicio 14.

Dedúzcase que $\forall k>0$ se cumple la desigualdad: $\dfrac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\dfrac{1}{k}$

Ejercicio 15.

Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+............+\frac{1}{n}\right)$

Ejercicio 16.

Dedúzcase que $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\ln(n+1)-\ln(n)}=+\infty$

Ejercicio 17.

Demostrar que se verifica la desigualdad: $x < arcsenx < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x\in(0,1)$

Ejercicio 18.

Razona que la función $f(x)=2arctgx+arcsen\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ es constante en el intervalo $[1,+\infty)$ y halla dicha constante.

Ejercicio 19.

Sea α un número real fijo. Probar que existe un único número real $\beta>0$, que es solución de la ecuación $x+\ln x=\alpha$.

Ejercicio 20.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+nx & si \;\; x<-2 \\ x^3+m & si \;\; x\geq -2\end{cases}$.

- Determinar m y n para que se cumplan la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4,\,2]$.
- Hallar los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

Ejercicio 21.

Probar que cualesquiera que sean $a,b,c \;\; (a\neq 0)$, el polinomio ax^4+bx+c no tiene más de dos raíces reales.

Ejercicio 22.

Demostrar que la ecuación $4x^5+3x+m=0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Ejercicio 23.

Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0)=0$, $g(2)=2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0,2)$ tal que $g'(c)=1$.

Ejercicio 24.

Sea $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$

- Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x=0$.
- Estudiar cuándo se verifica que $f'(x)=0$. Puesto que $f(1)=f(-1)$, ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$.

Ejercicio 25.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{2+sen\,x-cos\,x}$, se pide:

- Calcular sus extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi,\pi]$
- Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c\in[-\pi,\pi]$ tal que $f''(c)=0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.