

Iniciación a la geometría analítica del espacio.

Ejercicio 1

Encuentra las ecuaciones de la recta paralela a $r \equiv \begin{cases} 4x + y - z = 3 \\ x - 2y - z = -3 \end{cases}$ y que contiene al punto $P(1, -1, 2)$.

Solución:

Para obtener el vector con la dirección de $r \equiv \begin{cases} 4x + y - z = 3 \\ x - 2y - z = -3 \end{cases}$, podemos resolver el sistema y la solución serán las ecuaciones paramétricas de r .

$$\begin{cases} 4x - z = 3 - y \\ -x + z = 3 - 2y \end{cases} \rightarrow 3x = 6 - 3y \rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = 5 - 3y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (-1, 1, -3)$$

También podríamos haber sacado un vector de r como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta, es decir, $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$, siendo $\vec{n}_1 = (4, 1, -1)$ y $\vec{n}_2 = (1, -2, -1)$

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 9\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u} = (-3, 3, -9) \text{ y } \vec{u} = 3\vec{v}, \text{ por lo que tienen igual dirección.}$$

Ahora, la recta paralela a r y que contiene al punto $P(1, -1, 2)$ es $r' \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$

Ejercicio 2

Halla la ecuación implícita del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y es paralelo a la recta

$$s \equiv \frac{x-5}{3} = y = z + 1.$$

Solución:

Para construir un plano necesitamos un punto y dos vectores con direcciones diferentes. Si el plano contiene a la recta r , podemos usar cualquier punto de r y su vector director. Como también es paralelo a s , contiene a su vector director.

Sacamos las ecuaciones paramétricas de $r: \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 2 + z \\ 2x - y = 1 - 2z \end{cases} \rightarrow 3x = 3 - z \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{z}{3} \\ y = 1 + \frac{4z}{3} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto } P(1, 1, 0) \\ \text{vector } \vec{v} = (-1, 4, 3) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{3} = y = z + 1 \Rightarrow \text{vector } \vec{u} = (3, 1, 1)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 10y - 13z - 11 = 0$$

Ejercicio 3

Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 4z = -5$, halla la ecuación de un plano paralelo a π y que pase por el punto $A(-1, -2, 1)$.

Solución:

Todos los planos paralelos a $\pi \equiv 2x - y + 4z = -5$ comparten el mismo vector normal $\vec{n} = (2, -1, 4)$

Como debe contener al punto $A(-1, -2, 1)$, la ecuación del plano pedido será $\pi' \equiv 2(x+1) - 1(y+2) + 4(z-1) = 0$
 $\pi' \equiv 2x - y + 4z - 4 = 0$

Ejercicio 4

Encuentra la ecuación del plano que contiene a los puntos $A(0, -3, 2)$, $B(-1, 0, -2)$ y $C(2, 1, -1)$.

Solución:

Para construir un plano necesitamos un punto y dos vectores con direcciones diferentes. Si los tres puntos estuviesen alineados, habría infinitos planos en los que estarían contenidos.

$$A(0, -3, 2), B(-1, 0, -2), C(2, 1, -1) \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \text{punto } A(0, -3, 2) \\ \text{vectores } \overrightarrow{AB} = (-1, 3, -4) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (2, 4, -3) \end{cases}$$

$$\text{Si lo expresamos en paramétricas } \pi \equiv \begin{cases} x = -\lambda + 2\mu \\ y = -3 + 3\lambda + 4\mu \\ z = 2 - 4\lambda - 3\mu \end{cases} ; \text{ o en forma implícita } \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z-2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv 7x - 11y - 10z - 13 = 0$$

Ejercicio 5

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, -3, 2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$.

Solución:

Si la recta es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$, tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n} = (2, -1, 1)$.

$$\text{Si pasa por el punto } P(1, -3, 2), \text{ tendrá ecuaciones paramétricas } r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 6

Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(-1, 1, -3)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -3 \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Solución:

Si un plano es perpendicular a una recta, tiene como vector normal el vector director de la recta $\vec{d} = (-1, 0, 2)$

Como debe contener al punto $P(-1, 1, -3)$, la ecuación del plano pedido será $\pi \equiv -1(x+1) + 0(y-1) + 2(z+3) = 0$
 $\pi \equiv -x + 2z + 5 = 0$

Ejercicio 7

Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,1,-2)$ y corta perpendicularmente a la

$$\text{recta } r \equiv \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{2} = z+1.$$

Solución:

Calculamos el plano π perpendicular a la recta r y que contiene al punto $P(2,1,-2)$

$$\pi \text{ tiene como vector normal } \vec{n} = (-2, 2, 1) \Rightarrow \pi \equiv -2(x-2) + 2(y-1) + 1(z+2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv -2x + 2y + z + 4 = 0$$

$$\text{Ahora hallamos el punto de corte entre } \pi \text{ y } r \equiv \begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \text{ ; ese punto } A \text{ es: } \begin{cases} A(-2-2\lambda, 1+2\lambda, -1+\lambda) \text{ puesto que está en } r \\ A \text{ verifica la ecuación de } \pi \text{ puesto que está en } \pi \end{cases}$$

$$-2(-2-2\lambda) + 2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow A(0, -1, -2)$$

$$\text{La recta pedida es la que pasa por los puntos } A \text{ y } P \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \text{punto } P(2, 1, -2) \\ \text{vector } \overrightarrow{AP} = (2, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 8

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$ y es perpendicular al plano

$$\pi \equiv 2x - y + 2z = 0.$$

Solución:

Si el plano contiene a la recta r , contiene un punto de r y su vector director. Si el plano es perpendicular a $\pi \equiv 2x - y + 2z = 0$, contiene a su vector $\vec{n} = (2, -1, 2)$.

$$\text{Sacamos las ecuaciones paramétricas de } r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 - z \\ 2x + y = 5 - 2z \end{cases} \rightarrow 3x = 6 - 3z \rightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto } P(2, 1, 0) \\ \text{vector } \vec{v} = (-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + 4y + z - 6 = 0$$

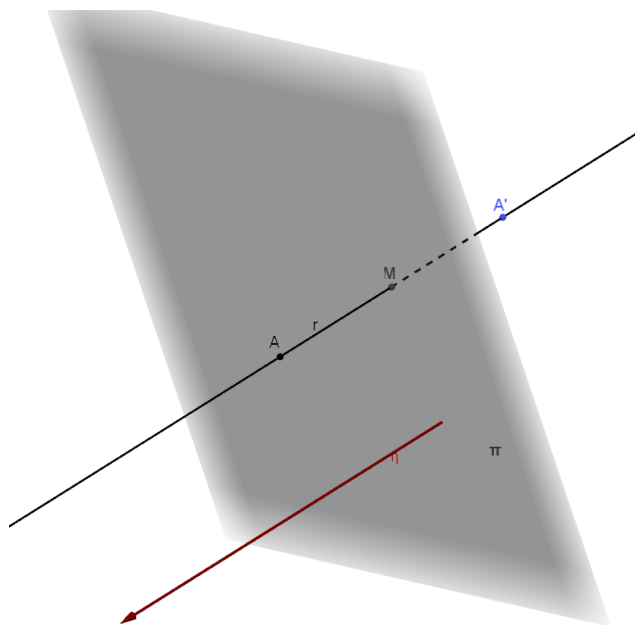
Ejercicio 9

Halla el punto simétrico de $A(1, -2, 1)$ con respecto al plano $\pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0$.

Solución:

Tenemos que calcular la recta perpendicular al plano $\pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0$ que pasa por el punto $A(1, -2, 1)$

$$r \equiv \begin{cases} \text{vector normal al plano } \vec{n} = (3, -4, -2) \\ \text{punto } A(1, -2, 1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 - 4\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$



El punto de corte entre el plano π y la recta r es el punto medio entre A y su simétrico A' con respecto a π

$$M = r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} M \in r \Rightarrow M(1+3\lambda, -2-4\lambda, 1-2\lambda) \\ M \in \pi \Rightarrow 3(1+3\lambda) - 4(-2-4\lambda) - 2(1-2\lambda) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$3+9\lambda+8+16\lambda-2+4\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda = -\frac{10}{29}$$

$$\text{Entonces } M\left(-\frac{1}{29}, -\frac{18}{29}, \frac{49}{29}\right)$$

$$\text{Como } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA'} = 2\left(-\frac{1}{29}, -\frac{18}{29}, \frac{49}{29}\right) - (1, -2, 1) = \left(-\frac{31}{29}, \frac{22}{29}, \frac{69}{29}\right)$$

$$A'\left(-\frac{31}{29}, \frac{22}{29}, \frac{69}{29}\right)$$

Ejercicio 10

Sean el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$ y los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(1, 1, 2)$. Halla la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ que está contenida en el plano π .

Solución:

La mediatriz pasa por el punto M , punto medio entre A y B , y con una dirección que es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ y al vector normal al plano π , $\vec{\eta} = (1, -2, 2) \Rightarrow$ la dirección de la mediatriz será la del vector $\overline{BA} \wedge \vec{\eta}$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(2, 0, 2) = (1, 0, 1) \Rightarrow M(1, 0, 1) \quad ; \quad \overline{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (0, -2, -2)$$

$$\overline{BA} \wedge \vec{\eta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{v} = \frac{1}{2}(\overline{BA} \wedge \vec{\eta}) \rightarrow \vec{v} = (-4, -1, 1) \text{ tiene la dirección de la mediatriz.}$$

$$\text{La mediatriz es } r \equiv \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

