EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LÍMITES Y TEOREMAS DE CONTINUIDAD

1. Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x<0 \\ x^2+2a\cos x & si \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si \quad x\ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

Solución:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x<0 & \rightarrow & en\ (-\infty,0),\ f(x)\ \text{está definida por un polinomio por tanto es continua.} \\ x^2+2a\cos x & si \quad 0\le x<\pi & \rightarrow & en\ (0,\pi),\ f(x)\ \text{es suma de funciones continuas por tanto es continua.} \\ ax^2+b & si \quad x\ge \pi & \rightarrow & en\ (\pi,+\infty),\ f(x)\ \text{está definida por un polinomio por tanto es continua.} \end{cases}$$

Entonces, para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe ser continua en $x=0$ y en $x=\pi$.

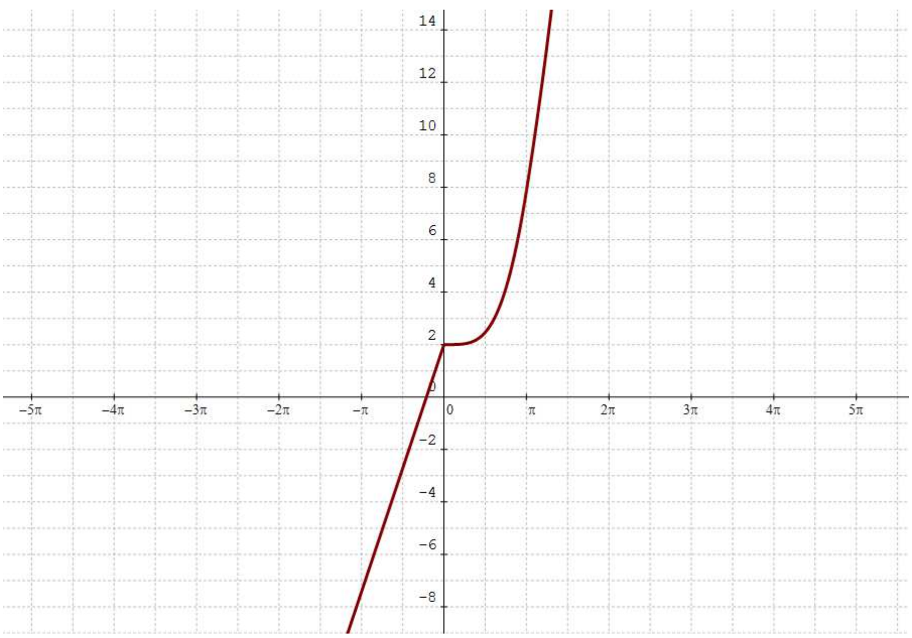
$f(x)$ *es continua en* $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$; $f(0)=0^2+2a\cdot cos(0)=2a$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(3x+2)=2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+2a\cdot cosx\right)=2a \end{cases} \rightarrow \quad 2=2a \quad \rightarrow \quad a=1$$

$f(x)$ *es continua en* $x=\pi \Leftrightarrow \lim_{x\to \pi} f(x)=f(\pi)$; $f(\pi)=a\pi^2+b=\pi^2+b$ *puesto que* $a=1$

$$\lim_{x\to \pi} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^-}\left(x^2+2a\cdot cosx\right)=\pi^2-2a=\pi^2-2 \\ \lim_{x\to \pi^+} f(x)=\lim_{x\to \pi^+}\left(ax^2+b\right)=a\pi^2+b=\pi^2+b \end{cases} \rightarrow \quad \pi^2-2=\pi^2+b \quad \rightarrow \quad b=-2$$

$f(x)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$ *cuando* $a=1$ *y* $b=-2$.



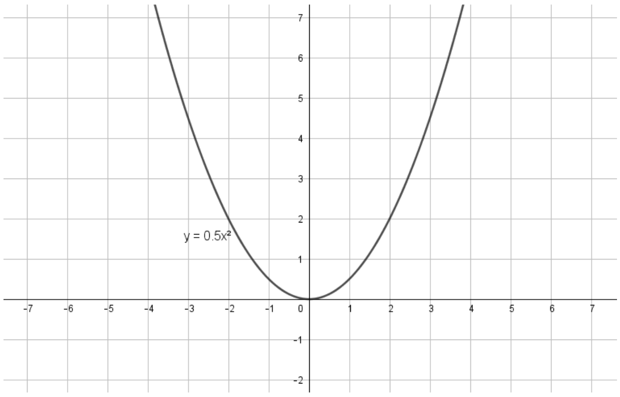
2. Qué podemos decir sobre la continuidad de la función $f(x) = \lim\limits_{a \to +\infty} \sqrt{a}\left(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a}\right)$.

<u>*Solución:*</u>

$$\lim_{a\to+\infty}\sqrt{a}\left(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a}\right)=\xrightarrow{indeterminación\ (\infty-\infty)}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\sqrt{a}\left(x^2+a-a\right)}{\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{a\to+\infty}\frac{x^2\cdot\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\xrightarrow{indeterminación\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\frac{x^2\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}{\frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\lim_{a\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^2}{a}+1}+1}=\frac{x^2}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{x^2}{1+1}=\frac{x^2}{2}$$

Entonces $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ *que al ser una función polinómica es continua en todo* $\mathbb{R}$.



3. Razónese que la función $f(x) = sen\left(x^3\right)\cdot e^{x^2+2}$ es continua.

<u>*Solución:*</u>

$f(x)=sen\left(x^3\right)\cdot e^{x^2+2}$

Para que la composición de dos funciones $(f\circ g)$ *sea continua en un punto* $x=x_0$, *tiene que cumplirse que la función* g *sea continua en el punto* x_0, *y que la función* f *sea continua en el punto* $y_0=g(x_0)$.

$y=sen\left(x^3\right)$ *es la composición de las funciones* $\begin{cases} g_1(x)=x^3 \\ g_2(x)=sen\,x \end{cases}$; $(g_2\circ g_1)(x)=sen\left(x^3\right)$

$g_1(x)=x^3$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$ *y* $g_2(x)=sen\,x$ *es continua en todo* $\mathbb{R}\Rightarrow(g_2\circ g_1)(x)=sen\left(x^3\right)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$.

$y=e^{x^2+2}$ *es la composición de las funciones* $\begin{cases} g_3(x)=x^2+2 \\ g_4(x)=e^x \end{cases}$; $(g_4\circ g_3)(x)=e^{x^2+2}$

$g_3(x)=x^2+2$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$ *y* $g_4(x)=e^x$ *es continua en todo* $\mathbb{R}\Rightarrow(g_4\circ g_3)(x)=e^{x^2+2}$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$.

Ahora, la función $f(x)=sen\left(x^3\right)\cdot e^{x^2+2}$ *es producto de dos funciones continuas en todo* $\mathbb{R}\Rightarrow$ $f(x)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$.

4. Obtener el valor de k sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5}=e^2$.

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5}=e^2 \;\rightarrow\; \textit{sabemos que}\;\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5}=\xrightarrow{\text{indeterminación } 1^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{kx+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{kx+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot(kx+5)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3}{x}\cdot(kx+5)\right]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3}{x}\cdot(kx+5)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3kx+15}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3k+\frac{15}{x}\right)}=e^{3k}\;\rightarrow\;\textit{como } e^{3k}=e^2\;\Rightarrow\;3k=2\;\Rightarrow\;k=\frac{2}{3}$$

5. Sea $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$, hallar el dominio de f y el valor que debe asignarse a $f(0)$ para que la función esté definida y sea continua en el intervalo cerrado $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Solución:

Para el dominio de $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$ *debemos tener en cuenta que, en las fracciones, los denominadores no pueden ser cero y las raíces de índice par no pueden tener radicando negativo.*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Atendiendo a los denominadores}: \; x\neq 0 \; y \; x\neq -1\\ \textit{Atendiendo a la raíz}: 1+x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -1\end{array}\right\}\;\Rightarrow\; Dom(f)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

$f(x)$ *es suma y cociente de funciones continuas* $\Rightarrow$ *es continua en todo su dominio. Todos los puntos del intervalo* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ *están contenidos en* $Dom(f)$ *salvo* $x=0$.

Veamos que ocurre con $f(x)$ *en el punto* $x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0}{0}\;\Rightarrow\; f(0)$ *no existe.*

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1+x}\right)\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{x\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{x\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}\overset{(3)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}\overset{(4)}{=}\frac{-1}{\sqrt{1+0}\left(1+\sqrt{1+0}\right)}=\frac{-1}{2}$$

(1) *Al sustituir* x *por* 0, *nos encontramos con la indeterminación* $\frac{0}{0}$. *Operamos para reducir la expresión.*

(2) *Continuamos con la indeterminación* $\frac{0}{0}$. *Multiplicamos y dividimos por* $\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ *para quitar el problema del numerador.*

(3) *Podemos dividir por* x *al numerador y al denominador porque, en el límite,* x *es un valor muy próximo a cero pero* $x\neq 0$.

(4) *Ya no hay indeterminación, resolvemos el límite sustituyendo* x *por* 0.

$f(0)$ no existe, pero sí existe $\lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=0$. Como $f(0)$ no existe, podemos asignarle el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ con lo que conseguimos $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ y, entonces, $f(x)$ sería continua en $x=0$

Así tenemos que, si $f(0)=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)$ será continua en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

6. La función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+n}{x^3+mx^2-14x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=2$. Hállense m,n y todas sus discontinuidades.

<u>*Solución:*</u>

Que $f(x)$ tenga una discontinuidad evitable en $x=2$, implica que $f(2)$ no existe pero $\lim_{x\to 2} f(x)$ si existe.

Como $f(x)=\dfrac{x^2-2x+n}{x^3+mx^2-14x}$ está definida por una fracción algebraica, la opción de que $\lim_{x\to 2} f(x)$ sea un número y que $f(2)$ no exista, pasa por que $f(2)=\frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+n=0 \quad para\ x=2 \ \Rightarrow\ n=0 \\ x^3+mx^2-14x=0 \quad para\ x=2 \ \Rightarrow\ 8+4m-28=0 \ \Rightarrow\ m=5 \end{cases}$

Ahora $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^3+5x^2-14x} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^3+5x^2-14x}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{x(x-2)(x+7)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{(x+7)}=\dfrac{1}{9} \to$ si definimos $f(2)=\frac{1}{9}$ la función $f(x)$ será continua en $x=2$.

Las posibles discontinuidades de $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^3+5x^2-14x}$ estarán en los puntos donde el denominador se anule.
$x^3+5x^2-14x=x(x-2)(x+7) \Rightarrow$ ya hemos analizado la función en $x=2$, ahora lo haremos en $x=0$ y $x=-7$

$$En\ x=0 \begin{cases} f(0)=\dfrac{0}{0} \\ \lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{x^3+5x^2-14x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x-2)}{x(x-2)(x+7)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+7)}=\dfrac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ presenta un discontinuidad evitable.}$$

$$En\ x=-7 \begin{cases} f(-7)=\dfrac{63}{0} \to \infty \\ \lim_{x\to -7}\dfrac{x^2-2x}{x^3+5x^2-14x}=\lim_{x\to -7}\dfrac{x(x-2)}{x(x-2)(x+7)}=\begin{cases} \lim_{x\to -7^-}\dfrac{1}{(x+7)}=\dfrac{1}{0^-}\to -\infty \\ \lim_{x\to -7^+}\dfrac{1}{(x+7)}=\dfrac{1}{0^+}\to +\infty \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) \text{ presenta un discontinuidad} \\ \text{de tipo infinito.} \end{array} \right.$$

$f(x)$ presenta discontinuidades evitables en $x=0$ y $x=2$ y discontinuidad de tipo infinito en $x=-7$.

7. Probar que la función $y=\dfrac{x^2+1}{3-\cos x}$ alcanza el valor 2 en algún punto de su dominio.

<u>*Solución:*</u>

Para probar lo que nos piden, aplicaremos el teorema de los valores intermedios o de Darboux. También podríamos resolverlo utilizando el teorema de Bolzano.

El teorema de Darboux nos afirma:

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Si $x_1 < x_2$ son dos puntos cualesquiera de $[a, b]$, tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$, al menos una vez, en el intervalo (x_1, x_2).

La función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3-\cos x}$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$ *porque es cociente de funciones continuas y* $3-\cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
$Dom(f) = \mathbb{R}$

Buscamos dos puntos x_1 *y* x_2 *tales que* $f(x_1) < 2$ *y* $f(x_2) > 2$, *por ejemplo* $x_1 = 0$ *y* $x_2 = \pi$

$$f(0) = \frac{1}{2} < 2 \;\; y \;\; f(\pi) = \frac{\pi^2+1}{4} > 2 \quad \Rightarrow \quad f(0) < 2 < f(\pi)$$

Tenemos que $f(x)$ *es continua en* $[0, \pi]$ *y* $f(0) \neq f(\pi)$ $\Rightarrow$ *estamos en las hipótesis del teorema de Darboux, que nos garantiza que la función toma todos los valores comprendidos entre* $f(0) = \dfrac{1}{2}$ *y* $f(\pi) = \dfrac{\pi^2+1}{4}$, *al menos una vez, en el intervalo* $(0, \pi) \Rightarrow$ *esto quiere decir que, al menos, existe un punto* $c \in (0, \pi)$ *tal que* $f(c) = 2$

$f(x)$ *alcanza el valor 2 en* $x = c$, $c \in (0, \pi)$, $c \in Dom(f)$.

8. Supongamos que f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Probar que $g(c) = f(c)$ para algún número $c \in [a,b]$.

<u>*Solución:*</u>

Para probar lo que nos piden, aplicaremos el teorema Bolzano. También podríamos resolverlo utilizando el teorema de Darboux.

El teorema de Bolzano nos afirma:

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, tal que signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Definimos la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} h(x) \text{ es continua en } [a, b] \text{ puesto que } f(x) \text{ y } g(x) \text{ lo son} \\ h(a) = f(a) - g(a) < 0 \;\; y \;\; h(b) = f(b) - g(b) > 0 \end{array}\right\} \text{se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano.}$$

Este teorema nos garantiza que existe $c \in (a, b)$ *tal que* $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$

9. Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto, y localizarlo aproximadamente.

<u>*Solución:*</u>

Definimos la función $h(x) = f(x) - g(x) \;\rightarrow\; h(x) = \ln x - e^{-x}$

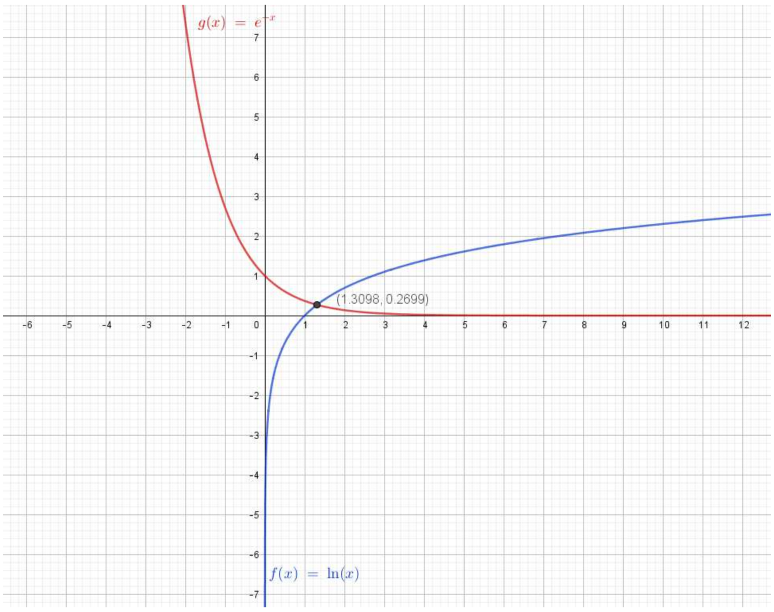
$$\left.\begin{array}{l} h(x) \text{ es continua en } [1, e] \text{ puesto que } f(x) \text{ y } g(x) \text{ lo son.} \\ h(1) = f(1) - g(1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e} < 0 \;\; y \;\; h(e) = f(e) - g(e) = 1 - e^{-e} = 1 - \dfrac{1}{e^e} > 0 \end{array}\right\} \text{se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano.}$$

Este teorema nos garantiza que existe $c \in (1,\, e)$ *tal que* $h(c)=0 \;\Rightarrow\; f(c)-g(c)=0 \;\Rightarrow\; f(c)=g(c) \;\Rightarrow$ *las gráficas de las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *se cortan en el punto* $x=c$.

Encontremos ese punto c, aproximadamente, reduciendo el intervalo en el que cambia de signo la función $h(x)$.

$$\left.\begin{matrix} h(1)<0 \\ h(2)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(1,\,2) \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} h(1)<0 \\ h(1'5)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(1,\,1'5) \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} h(1'3)<0 \\ h(1'4)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(1'3,\,1'4) \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} h(1'3)<0 \\ h(1'35)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(1'3,\,1'35)$$

Podemos decir que el punto de corte de ambas gráficas está, aproximadamente, en $x \simeq 1'3$.



10. La ecuación $x^x = 326$ tiene una solución positiva. Hállese dicha solución con una cifra decimal exacta. (La función $f(x) = x^x$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$)

<u>*Solución:*</u>

$f(x)=x^x$ *es continua* $\forall x\in(0,+\infty)$. *Definimos la función* $g(x)=f(x)-326 \;\rightarrow\; g(x)=x^x-326$

$$\left.\begin{matrix} g(x) \text{ es continua en } [1,\,5] \text{ puesto que es suma de funciones continuas.} \\ g(1)=1^1-326=-325<0 \;\; y \;\; g(5)=5^5-326=3125-326=2799>0 \end{matrix}\right\} \text{se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano.}$$

Este teorema nos garantiza que existe $c\in(1,\,5)$ *tal que* $g(c)=0 \;\Rightarrow\; c^c-326=0 \;\Rightarrow\; c^c=326 \;\Rightarrow\; x=c$ *es solución de la ecuación* $x^x=326$.

Encontremos ese valor c, *reduciendo el intervalo en el que cambia de signo la función* $g(x)$.

$$\left.\begin{matrix} g(4)<0 \\ g(5)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(4,\,5) \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} g(4)<0 \\ g(4'5)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(4,\,4'5) \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} g(4)<0 \\ g(4'2)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(4,\,4'2) \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} g(4'1)<0 \\ g(4'2)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\in(4'1,\,4'2)$$

Podemos decir que la solución de la ecuación, aproximada a una cifra decimal exacta, es $x \simeq 4'1$.

11. La ecuación $x \cdot 2^x = 1$ tiene alguna solución en el intervalo $[0,1]$. Razónese por qué y hállese la misma con una cifra decimal exacta.

<u>*Solución:*</u>

$x \cdot 2^x = 1 \quad \rightarrow \quad x \cdot 2^x - 1 = 0$

Definimos la función $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, *que es continua* $\forall x \in \mathbb{R}$ *por ser producto y suma de funciones continuas.*

En particular, $f(x)$ *será continua en el intervalo* $[0, 1]$, *con lo que tenemos:*

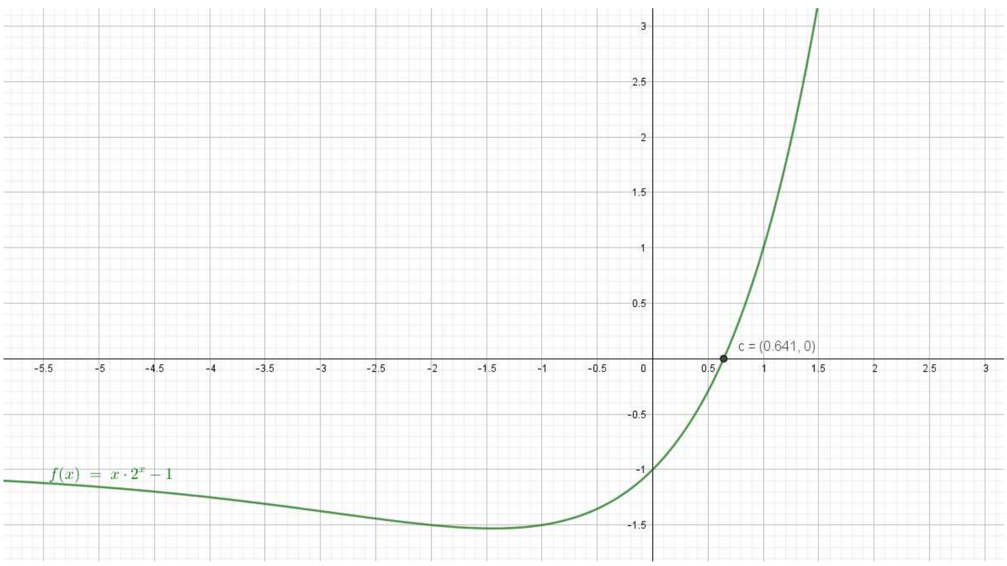
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [0, 1] \\ f(0) = 0 \cdot 2^0 - 1 = -1 < 0 \quad y \quad f(1) = 1 \cdot 2^1 - 1 = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano.}$$

Este teorema nos garantiza que existe $c \in (0, 1)$ *tal que* $f(c) = 0 \Rightarrow c \cdot 2^c - 1 = 0 \Rightarrow c \cdot 2^c = 1 \Rightarrow$ $x = c$ *es solución de la ecuación* $x \cdot 2^x = 1$.

Encontremos ese valor c, *reduciendo el intervalo en el que cambia de signo la función* $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0'5) < 0 \\ f(1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (0'5, 1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0'5) < 0 \\ f(0'7) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (0'5, 0'7) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0'6) < 0 \\ f(0'7) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (0'6, 0'7) \rightarrow c = 0'6\ldots$$

Podemos decir que la solución de la ecuación, aproximada a una cifra decimal exacta, es $x \simeq 0'6$.



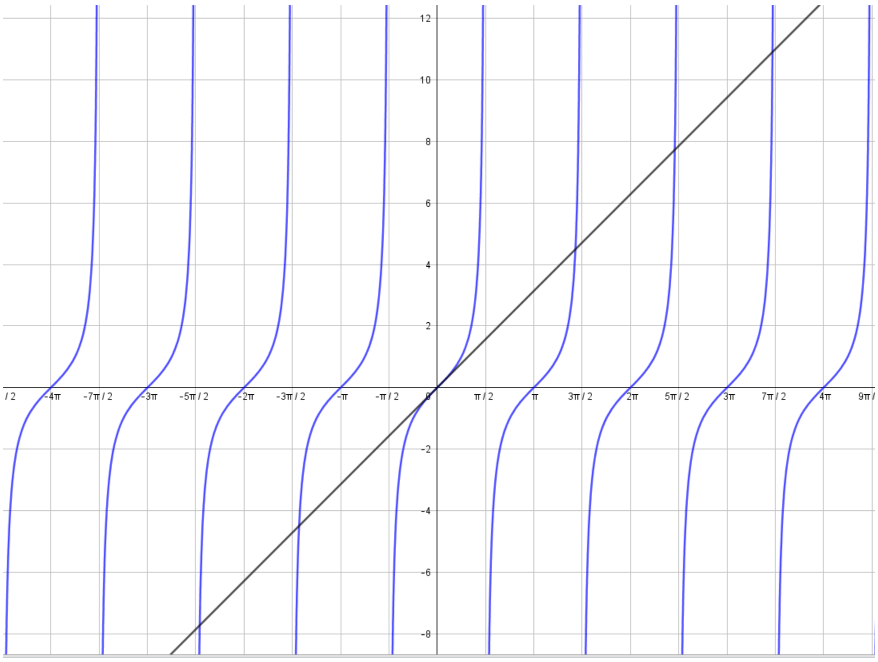
12. Hállese la menor solución positiva de la ecuación $tg\, x = x$ con dos cifras decimales exactas.

<u>*Solución:*</u>

La función $y = tg\, x$ *es discontinua cuando* $\cos x = 0 \Rightarrow$ *es continua en los intervalos de la forma* $\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right)$

En cada uno de esos intervalos, $y = tg\, x$ *es estrictamente creciente* $\Rightarrow$ *sólo corta una vez a la recta* $y = x$.

Para el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $tg\, x = x$ *en el punto* $x = 0$. *Nos piden la primera solución positiva, la buscamos en* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$



Definimos la función $f(x) = x - tg\,x \;\rightarrow\; f(x)$ *será continua en* $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ *por ser suma de funciones continuas en ese intervalo.*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } \left[2, \dfrac{9}{2}\right] \text{ puesto que } \left[2, \dfrac{9}{2}\right] \subset \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ f(2) = 2 - tg(2) \simeq 4{,}19 > 0 \;\; y \;\; f\left(\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{9}{2} - tg\left(\dfrac{9}{2}\right) \simeq -0{,}14 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano.}$$

Este teorema nos garantiza que existe $c \in \left(2, \dfrac{9}{2}\right)$ *tal que* $f(c) = 0 \;\Rightarrow\; c - tg(c) = 0 \;\Rightarrow\; tg(c) = c \;\Rightarrow$ *$x = c$ es la menor solución positiva de la ecuación* $tg(x) = x$

Encontremos ese valor c, *reduciendo el intervalo en el que cambia de signo la función* $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(4) > 0 \\ f(4'5) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (4,\, 4'5) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(4'4) > 0 \\ f(4'5) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (4'4,\, 4'5) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(4'45) > 0 \\ f(4'5) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (4'45,\, 4'5) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(4'49) > 0 \\ f(4'5) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (4'49,\, 4'5)$$

Entonces, $c = 4'49\ldots \;\Rightarrow$ *podemos decir que la menor solución positiva de la ecuación, con dos cifras decimales exactas, es* $x \simeq 4'49$.

13. Demostrar que toda ecuación polinómica de grado impar y coeficientes reales tiene por lo menos una solución real.

<u>*Solución:*</u>

Un polinomio de grado impar es de la forma $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$ *y suponemos que* $a^{2n+1} > 0$

Definimos la función $f(x) = p(x)$ *que es continua en todos los números reales.*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}\Bigg(a_{2n+1} + \underbrace{\frac{a_{2n}}{x}}_{0} + \cdots + \underbrace{\frac{a_1}{x^{2n}}}_{0} + \underbrace{\frac{a_0}{x^{2n+1}}}_{0}\Bigg) \rightarrow (-\infty)\cdot a^{2n+1} = -\infty \quad \text{porque } \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left(a_{2n+1}+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{a_{2n}}{x}}+\cdots+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{a_1}{x^{2n}}}+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{a_0}{x^{2n+1}}}\right) \to (+\infty)\cdot a^{2n+1} = +\infty \quad porque \lim_{x\to+\infty} x^{2n+1} \to +\infty$$

Entonces, existe un número real $M>0$, *suficientemente grande, tal que* $f(-M)<0$ *y* $f(M)>0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-M, M] \\ f(-M)<0 \text{ y } f(M)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano.}$$

Este teorema nos garantiza que existe $c\in(-M, M)$ *tal que* $f(c)=0 \Rightarrow p(c)=0 \Rightarrow$ $x=c$ *es solución de la ecuación* $p(x)=0$

Si $a_{2k+1}>0$, *la ecuación polinómica de grado impar tiene al menos una solución real.*
Para $a_{2k+1}<0$ *se haría igual, teniendo en cuenta que* $f(-M)>0$ *y* $f(M)<0$.

Entonces, toda ecuación polinómica de grado impar tiene al menos una solución real.

14. Sea f una función definida en un entorno del punto $x=a$. ¿Cómo puede expresarse en términos de ε y δ la frase " f no es continua en $x=a$ "?

<u>*Solución:*</u>

Como $f(x)$ *no es continua en* $x=a \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ *entonces:*
Podemos encontrar $\varepsilon>0$ *tal que, para todo* $\delta>0$, *si* $x\in(a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x)\notin\left(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\right)$

15. Hállense todas las soluciones de la ecuación $x^3-3x+1=0$ con una cifra decimal exacta.

<u>*Solución:*</u>

$x^3-3x+1=0$, *al ser una ecuación polinómica de grado 3 con coeficientes reales, tendrá <u>una</u> o <u>tres</u> raíces reales.*
Sabemos, que toda ecuación polinómica con coeficientes reales, tiene, a lo sumo, tantas raíces reales como su grado; y en el caso de tener raíces complejas, éstas se encuentran de dos en dos, cada una emparejada con su conjugada.

Definimos la función $f(x)=x^3-3x+1$, *que es continua* $\forall x\in\mathbb{R}$ *por ser una función polinómica.*

En particular, $f(x)$ *será continua en los intervalos* $[-2,-1]$, $[0,1]$ *y* $[1,2]$ *con lo que tenemos:*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-2,-1], \text{ con } f(-2)=-1<0 \text{ y } f(-1)=3>0 \\ f(x) \text{ es continua en } [0,1], \text{ con } f(0)=1>0 \text{ y } f(1)=-1<0 \\ f(x) \text{ es continua en } [1,2], \text{ con } f(1)=-1<0 \text{ y } f(2)=6>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\text{se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano} \\ \text{en los tres intervalos.}\end{array}\right.$$

Este teorema nos garantiza que existen $c_1\in(-2,-1)$, $c_2\in(0,1)$ *y* $c_3\in(1,2)$ *tales que* $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0 \Rightarrow x=c_1$, $x=c_2$ *y* $x=c_3$ *son soluciones de la ecuación* $x^3-3x+1=0$.

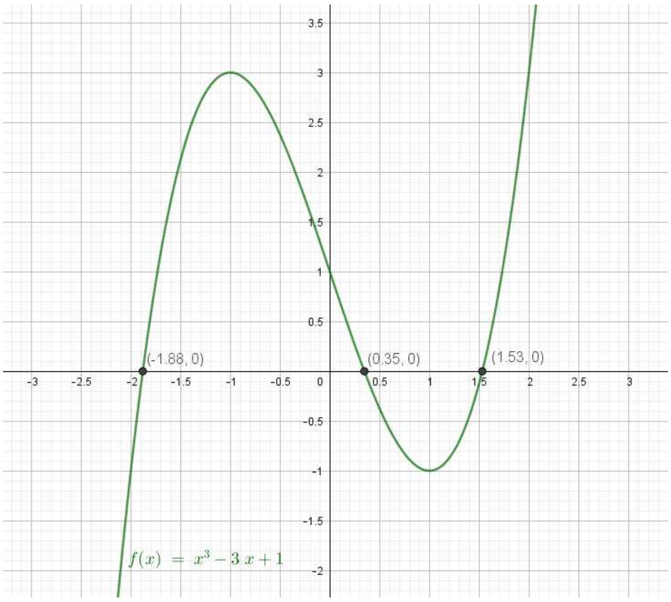
Encontremos esos valores de c_1, c_2 *y* c_3, *reduciendo los intervalos en los que cambia el signo de la función* $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)<0 \\ f(-1'5)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 \in (-2,-1'5) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(-2)<0 \\ f(-1'8)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 \in (-2,-1'8) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(-1'9)<0 \\ f(-1'8)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 \in (-1'9,-1'8) \rightarrow c_1 = -1'8\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)>0 \\ f(0'5)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 \in (0,\, 0'5) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0'3)>0 \\ f(0'5)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 \in (0'3,\, 0'5) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0'3)>0 \\ f(0'4)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 \in (0'3,\, 0'4) \rightarrow c_2 = 0'3\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1'5)<0 \\ f(2)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_3 \in (1'5,\, 2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1'5)<0 \\ f(1'7)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_3 \in (1'5,\, 1'7) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1'5)<0 \\ f(1'6)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_3 \in (1'5,\, 1'6) \rightarrow c_3 = 1'5\ldots$$

Entonces, las soluciones de la ecuación $x^3-3x+1=0$, con una cifra decimal exacta, son $c_1 \simeq -1{,}8$, $c_2 \simeq 0{,}3$ y $c_3 \simeq 1{,}5$.



16. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$, encontrar los puntos de discontinuidad de f y determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

<u>*Solución:*</u>

La función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$, es cociente de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ y será una función continua en todos los números reales, salvo en los que anulen al denominador.

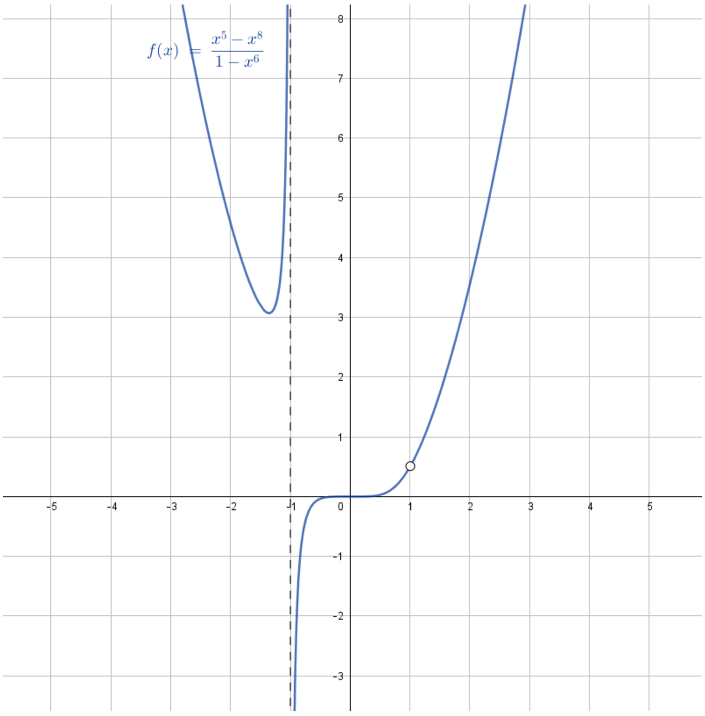
Veamos cuándo $1-x^6=0$. Descomponemos $1-x^6$ en factores: $1-x^6=(1-x^3)(1+x^3)$ y aplicamos Ruffini a cada factor $\rightarrow$

$$1-x^6=(1-x)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) \rightarrow 1-x^6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases},$$ *puesto que los polinomios de 2º grado son primos.*

Entonces, la función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$ es discontinua en los puntos $x=1$ y $x=-1$.

$$\text{En } x=1 \rightarrow \begin{cases} f(1)=\dfrac{0}{0} \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5}{(1+x^3)}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{en } x=1 \text{ la discontinuidad es evitable.}$$

$$En\ x=-1 \to \begin{cases} f(-1)=\dfrac{-2}{0}\ \ no\ existe \\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^5(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^5}{(1+x^3)}=\dfrac{-1}{0^-}\to +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^5(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^5}{(1+x^3)}=\dfrac{-1}{0^+}\to -\infty \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} en\ x=1\ la\ discontinuidad\ es \\ de\ tipo\ infinito. \end{array} \right.$$



17. Se considera la ecuación $x^3+\lambda x^2-2x=1$. Utilizando el Teorema de Bolzano,

   a. Probar que si $\lambda>2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.
   b. Probar que si $\lambda<2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

Solución:

$x^3+\lambda x^2-2x=1 \Rightarrow x^3+\lambda x^2-2x-1=0$; *sea la función* $f(x)=x^3+\lambda x^2-2x-1$, $f(x)$ *es una función siempre continua, por ser polinómica y los puntos* x_0 *tales que* $f(x_0)=0$ *son raíces de la ecuación.*

a) *Para* $\lambda>2$, $f(x)$ *es continua en* $[0,1]$, *con* $f(0)=-1<0$ *y* $f(1)=\lambda-2>0$, *entonces, por el teorema de Bolzano*, $\exists x_0\in(0,1)$ *tal que* $f(x_0)=0 \Rightarrow$ *la ecuación admite alguna solución menor que* 1.

b) *Para* $0\le\lambda<2$, $f(x)$ *es continua en* $[1,2]$, *con* $f(1)=\lambda-2<0$ *y* $f(2)=4\lambda+3>0$, *entonces, por el teorema de Bolzano*, $\exists x_0\in(1,2)$ *tal que* $f(x_0)=0 \Rightarrow$ *la ecuación admite alguna solución mayor que* 1.

Para $\lambda<0$, $f(x)$ *es continua en* $[1,2-\lambda]$, *con* $f(1)=\lambda-2<0$ *y* $f(2-\lambda)=(2-\lambda)^3+\lambda(2-\lambda)^2-2(2-\lambda)-1$

$f(2-\lambda)=8-12\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+4\lambda-4\lambda^2+\lambda^3-4+2\lambda-1=2\lambda^2-6\lambda+3 \Rightarrow 2\lambda^2-6\lambda+3>0\ \forall\lambda<0 \Rightarrow$

por el teorema de Bolzano, $\exists x_0\in(1,2-\lambda)$ *tal que* $f(x_0)=0 \Rightarrow$ *la ecuación admite alguna solución mayor que* 1.

18. Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\frac{1}{n}}}{(x-3)^{\frac{1}{m}}}$ en los siguientes casos:

a. Si $m>n$

b. Si $m\le n$

<u>*Solución:*</u>

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\frac{1}{n}}}{(x-3)^{\frac{1}{m}}}=\lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}=\lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}$; *para que el límite tenga sentido, suponemos que* $m\neq 0$ *y* $n\neq 0$.

Debemos tener en cuenta que $f(x)=(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}$ *puede no existir para* $x<3$, *eso va a depender del valor* $\frac{m-n}{n\cdot m}$.

En el caso de que el dominio de la función $f(x)=(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}$ *sea* $[3,+\infty)$, *tendremos que* $\lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}$.

a) $m>n$

$$Si\ m>n>0\ \Rightarrow\ \frac{m-n}{n\cdot m}>0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0\\ \lim_{x\to 3^-}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0\end{cases}\Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0$$

$$Si\ m>0>n\ \Rightarrow\ \frac{m-n}{n\cdot m}<0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\xrightarrow{\text{dependiendo del valor de }\frac{n-m}{n\cdot m}\text{, puede ser}}\left\langle\begin{array}{l}\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right.\end{cases}$$

$$Si\ 0>m>n\ \Rightarrow\ \frac{m-n}{n\cdot m}>0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0\\ \lim_{x\to 3^-}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0\end{cases}\Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0$$

b) $m\le n$

$$Si\ 0<m<n\ \Rightarrow\ \frac{m-n}{n\cdot m}<0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\xrightarrow{\text{dependiendo del valor de }\frac{n-m}{n\cdot m}\text{, puede ser}}\left\langle\begin{array}{l}\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right.\end{cases}$$

$$Si\ m<0<n\ \Rightarrow\ \frac{m-n}{n\cdot m}>0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0\\ \lim_{x\to 3^-}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0\end{cases}\Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=0$$

$$Si\ m<n<0\ \Rightarrow\ \frac{m-n}{n\cdot m}<0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-3)^{\frac{n-m}{n\cdot m}}}=\xrightarrow{\text{dependiendo del valor de }\frac{n-m}{n\cdot m}\text{, puede ser}}\left\langle\begin{array}{l}\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right.\end{cases}$$

$$Si\ m=n\ \Rightarrow\ \frac{m-n}{n\cdot m}=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 3}(x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\lim_{x\to 3}(x-3)^{0}=\lim_{x\to 3}1=1$$