

EJERCICIOS DE ESPACIOS VECTORIALES

1. Define los siguientes conceptos:

- Vector.
- Escalar.
- Operación interna.
- Elemento neutro con la operación interna.
- Subespacio vectorial.
- Propiedad de un espacio vectorial.
- Combinación lineal.
- Subespacio generado por un vector.

2. Sea el espacio vectorial de las sucesiones de números reales. Encuentra una sucesión que sea combinación lineal de $a_n = n^2 - n$ y $b_n : -5, 1, 7, 13, \dots$

3. Comprueba si el vector $(1, -4, 2) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1, -1, 3)$ y $(2, 1, -1)$.

4. Sea A el subespacio generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$ y $\vec{u}_2 = (2, 3, -1)$ de V_3 .

- ¿El vector $\vec{v} = (0, 1, -1)$ está en A ?
- Encuentra dos vectores que pertenezcan al subespacio A .
- Dado el vector $\vec{w} = (3, \alpha, -1)$, ¿existe algún valor de α para el que $\vec{w}$ pertenezca al subespacio A ?

5. Reflexiona sobre las siguientes afirmaciones y justifica la respuesta:

- Sea $S = \{e_1 = (1, 0, 0, -1); e_2 = (0, 2, 1, 3); e_3 = (-1, 0, 1, -1)\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial E . S es un sistema de generadores para el espacio E .
- Sea $S = \{e_1 = (1, 0, -2); e_2 = (0, 3, 3); e_3 = (-1, 0, 2)\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial E . S es un sistema de vectores linealmente dependientes.
- Sea $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial E , tal que $e_2 = e_1 - e_3$, $e_3 \neq \lambda e_1$ y $e_4 = e_1 + e_2$. La dimensión del subespacio generado por S es 2.
- El sistema de vectores $S = \{e_1 = (1, -1, 1); e_2 = (0, 1, -1); e_3 = (1, 0, 1); e_4 = (2, 3, 0)\}$ es libre.
- Si $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base del espacio vectorial E , $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es un sistema de generadores para E .

6. Sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Comprueba si $B' = \{u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 - e_2\}$ es también base $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo, encuentra las coordenadas del vector v en B' , sabiendo que $v = (2, -3)$ en la base B .
7. Demuestra que $S = \{1+x^2, x+x^2, 1+x\}$ es una base de P_2 . Encuentra las coordenadas de $p(x) = 1+x+x^2$ en esta base.
8. En el espacio vectorial $F(\mathbb{R})$ de las funciones reales de variable real, prueba si las funciones $f(t) = e^t$ y $g(t) = e^{2t}$ son linealmente independientes.
9. En $\mathbb{R}^3$ se dan los vectores $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (2, -1, 1)$, $e_3 = (1, 0, 1)$ y $e_4 = (0, 1, 1)$. Comprueba si el subespacio generado por $\{e_1, e_2\}$ coincide con el subespacio generado por $\{e_3, e_4\}$.