

## EJERCICIOS. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES.

1. Calcular el siguiente determinante de orden  $n$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

2. Demostrar que si  $A$  es una matriz  $3 \times 3$  tal que  $A^t = -A$ , entonces  $|A| = 0$ . ¿Y si  $A$  es una matriz  $n \times n$ , se verifica lo anterior?

3. Sea  $A$  una matriz  $5 \times 5$  tal que  $|A| = 2$ , calcular:  $|5A|$ ;  $|A^{-1}|$ ;  $|A^2|$ ;  $|A \cdot A^{-1}|$ ;  $|A \cdot A^t|$ ;  $|(A^t)^{-1}|$

4. Encontrar  $a$  y  $b$  para que los vectores  $u_1 = (1, 2, a, 1)$ ,  $u_2 = (a, 1, 2, 3)$ ,  $u_3 = (0, 1, b, 0)$  sean linealmente dependientes y determinar una relación de dependencia.

5. Calcular el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$  según los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ .

6. Resolver la ecuación  $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$  y comprobar el resultado.

7. Sabiendo que  $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ; calcular el valor de  $|A^2|$ ,  $|2AA^t|$ ,  $|(A^t)^{-1}|$  y  $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix}$

8. Hállese la dimensión y una base del subespacio vectorial de  $R^4$  generado por los vectores  $u_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $u_2 = (2, 1, 1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_4 = (1, 2, 3, 4)$  y  $u_5 = (0, 1, 2, 3)$

9. Demostrar que el subespacio generado por  $\{u = (1, 2, 1); v = (1, 3, 2)\}$  es el mismo que el generado por  $\{x = (1, 1, 0); w = (3, 8, 5)\}$

**10.** Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

**11.** Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Encontrar los valores de  $\lambda$  para los que  $A \cdot B$  es invertible.
- Determinar los valores de  $\lambda$  para los que existe  $(B \cdot A)^{-1}$ .
- Calcular  $(B \cdot A)^{-1}$  para  $\lambda = -2$ .

**12.** En el espacio vectorial  $P_2$  de los polinomios de grado menor o igual que 2, se considera el siguiente subconjunto:  $A = \{p(x) \in P_2 / p(1) = p(2) = 0\}$ . ¿ $A$  es subespacio vectorial de  $P_2$ ? En caso afirmativo determinar su dimensión.

**13.** Si el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$  es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$  así como una combinación lineal nula de los vectores columna  $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$  y  $\vec{C}_4$ .

**14.** Probar si el sistema de vectores  $S = \{a_1 = (1,1,1); a_2 = (1,0,1); a_3 = (3,2,1)\}$  es base de  $\mathbb{R}^3$  y en caso afirmativo calcular las coordenadas de  $u = (1,2,3)$  en esta base.

**15.** Resolver la ecuación: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

**16.** Calcular el rango de la matriz  $A$  según los valores del parámetro  $\lambda$ : 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

17. Sin desarrollar, probar que 
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

18. Sin desarrollar, probar que 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

19. Resolver la ecuación: 
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

20. Encontrar los valores de  $\lambda$  para los que la matriz  $A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$  es invertible. Para  $\lambda=2$ , calcular la inversa de A y comprobar el resultado.

21. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de 
$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}.$$

22. Dados los vectores  $e_1 = (a, 1+a, 2a)$ ,  $e_2 = (a, 1, a)$  y  $e_3 = (1, a, 1)$ , se pide:

- determinar los valores de  $a$ , para los que los vectores  $e_1, e_2$  y  $e_3$  son linealmente dependientes.
- estudiar si el vector  $u = (3, 3, 0)$  depende linealmente de los vectores  $e_1, e_2$  y  $e_3$  para el caso  $a = 2$ . Justificar la respuesta.

23. Considérese el subespacio vectorial  $H \subseteq \mathbb{R}^3$  generado por los vectores  $u_1 = (-2, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, -4, 5)$ ,  $u_3 = (-4, -5, 13)$ . Averiguar si alguno de los vectores  $x = (2, 0, 4)$ ,  $y = (1, -11, 16)$  pertenece a  $H$ .

24. Demostrar, utilizando las propiedades de los determinantes, que

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(a+c)(b+c)$$

25. Resolver el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$$

26. Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

27. Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

28. Calcular para qué valor, o valores, de  $x$  admite inversa la siguiente matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  y

hallar  $A^{-1}$  para  $x=3$ .

29. Sea  $A$  una matriz  $4 \times 4$  tal que  $|A| = -2$ , calcula, justificando la respuesta:

$$|3A|; |-A^{-1}|; |A^4|; |2A \cdot A^{-1}|; |A \cdot A^t|; |(A^t)^{-1}|; |(A^{-1})^t|$$

30. Demostrar que si  $A$  es una matriz  $3 \times 3$  tal que  $A^t = -A$ , entonces  $|A| = 0$ . ¿Y si  $A$  es una matriz  $n \times n$ , se verifica lo anterior?

31. Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} = 0$$

**32.** Calcular el rango de la matriz  $A$ , según los diferentes valores del parámetro  $t \in \mathbb{R}$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

Indicar para qué valores de  $t \in \mathbb{R}$  no existe la matriz inversa de  $A$  y en caso de ser posible calcular  $A^{-1}$  para  $t = -1$ .

**33.** Si  $A$  es cualquier matriz con  $n$  filas y  $n$  columnas tal que  $A^3 = -A - I$  y se sabe que  $\det(A) = m$ , calcular el valor de  $\det(A + I)$  en función de  $m$ .

**34.** Estudiar el rango de la matriz  $A$  según los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ .

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

**35.** Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

**36.** Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

**37.** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ , dedúzcase cuándo  $A$  **no** tiene inversa.

**38.** Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

39. Calcular el rango de la matriz  $A$  según los valores del parámetro  $\lambda$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

40. Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

41. Sea el siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

- ¿Figurará el producto  $a_{11}a_{32}a_{23}a_{54}a_{45}$  en el desarrollo del determinante D?. ¿Con qué signo?
- Igual para el producto  $a_{11}a_{32}a_{43}a_{34}a_{55}$
- Escribir dos productos que en el desarrollo del determinante D aparezcan con signo positivo y otros dos con signo negativo.