# TEOREMAS BÁSICOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Cuando una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos en puntos $c$ y $c'$, respectivamente, de dicho intervalo. Esto quedaba demostrado con el teorema del máximo de Weierstrass.

Definición:

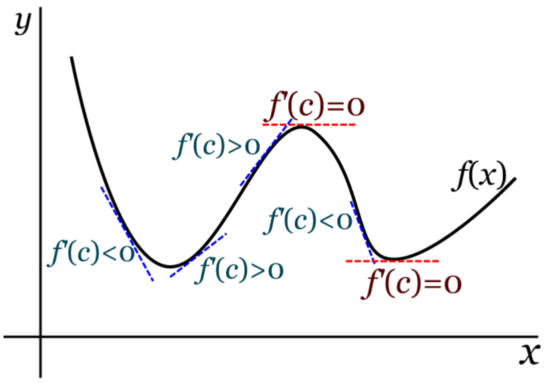
- Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I$; $f(x)$ alcanza un máximo relativo (local) en un punto $c$ de dicho intervalo si existe un entorno del punto $c$, $B_r(c)=(c-r,c+r)$, en el cual $f(c)\geq f(x)$, para todo $x\in B_r(c)$.
- Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I$; $f(x)$ alcanza un mínimo relativo (local) en un punto $c$ de dicho intervalo si existe un entorno del punto $c$, $B_r(c)=(c-r,c+r)$, en el cual $f(c)\leq f(x)$, para todo $x\in B_r(c)$.

Como todo máximo o mínimo absoluto es también local (relativo), siempre que hablemos de máximos o mínimos, consideraremos que son locales.

Teorema de Fermat:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $(a,b)$. Si $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto $x=c$, $c\in(a,b)$, y $f(x)$ es derivable en el punto $x=c$, entonces $f'(c)=0$.

Intuitivamente este teorema nos dice que si una función tiene un máximo o mínimo local en un punto en el cual es derivable, la derivada en ese punto debe ser cero puesto que coincide con la pendiente de la recta tangente en dicho punto y ésta debe ser horizontal.




Demostración del teorema:

Supongamos que $f(x)$ tiene un máximo en el punto $x=c$ y sea $h$ un número real tal que $(c+h)$ siga perteneciendo al entorno $B_r(c)$ dado por la definición de máximo. Así $f(c)\geq f(c+h)$, por tanto $f(c+h)-f(c)\leq 0$.

Si $h>0 \Rightarrow \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$ con lo que $f'_+(c)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$.

Si ahora $h<0 \Rightarrow \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ y tenemos que $f'_-(c)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$.

Como $f(x)$ es derivable en el punto $x=c$, deben coincidir las derivadas laterales $f'_+(c)=f'_-(c)$, entonces no queda otra opción que $f'(c)=0$.

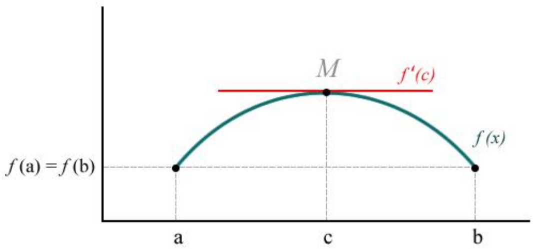
Análogamente haríamos la demostración en el caso de que $f(x)$ tenga un mínimo en el punto $x=c$.

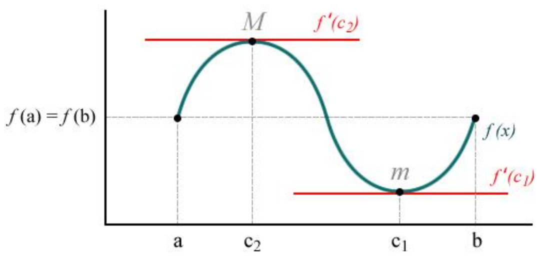
Este teorema nos indica el primer cálculo que debemos hacer para determinar los posibles máximos y mínimos que tiene una función derivable $y=f(x)$: resolver la ecuación $f'(x)=0$. Entre las raíces de esta ecuación, que llamaremos puntos singulares de la función, encontraremos los puntos en los que la función alcanza un máximo, un mínimo o ninguna de ambas cosas. Determinar el tipo de punto singular que la función alcanza en un punto $x=x_0$, con $f'(x_0)=0$, es una de las conclusiones a las que llegaremos con los siguientes teoremas.

Teorema de Rolle:

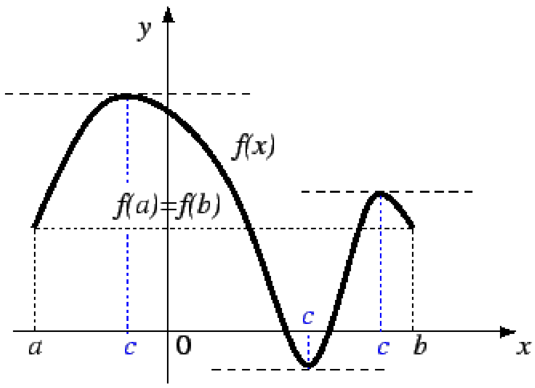
Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a,b)$, si $f(a)=f(b)$, existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ en el que $f'(c)=0$.

Intuitivamente el teorema nos afirma que si tenemos una función continua y derivable en un intervalo y además toma los mismos valores en los extremos de dicho intervalo, al menos existe un punto interior al intervalo en el que la recta tangente a la gráfica de la función sería horizontal.




La garantía sobre la existencia de ese punto no asegura que sea único, pueden existir varios puntos que verifiquen las tesis del teorema o incluso infinitos, en el caso de una función constante en el intervalo.



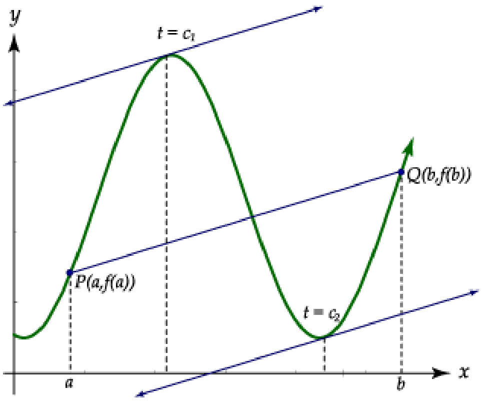
Demostración:

Por ser la función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, según el teorema del máximo de Weierstrass, alcanza su máximo y su mínimo absolutos en puntos de dicho intervalo. Supongamos que el máximo o el mínimo se encuentra en un punto $c$ interior al intervalo, es decir, $c\in(a,b)$, entonces, por el teorema de Fermat, $f'(c)=0$ y hemos terminado. Supongamos ahora que el máximo y el mínimo no están en puntos del intervalo $(a,b)$, entonces están en los extremos, uno en $x=a$ y el otro en $x=b$. Como $f(a)=f(b)$, el valor máximo y el valor mínimo son iguales y la función es constante en el intervalo, con lo que $f'(x)=0\ \ \forall x\in(a,b)$.

Teorema del valor medio o de Lagrange:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a,b)$ entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Intuitivamente, el teorema nos garantiza que si tenemos una función continua y derivable en un intervalo, existe, al menos, un punto interior al intervalo en el que la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $P(a,f(a))$ y $Q(b,f(b))$.




La recta que pasa por los puntos $P(a,f(a))$ y $Q(b,f(b))$ tiene pendiente $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y su ecuación es $y-y_0=m(x-x_0)$, es decir, si tomamos como punto $(x_0,y_0)$ al punto $P(a,f(a))$, tenemos $f(x)-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, o también $f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=0$.

Para demostrar este teorema nos basaremos en el teorema de Rolle por lo que necesitamos una función que cumpla las hipótesis de dicho teorema.

Demostración:

Consideramos la función $h(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. La función $h(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, por ser suma de funciones continuas y derivables.

Además $h(a)=h(b)=0$, puesto que $h(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$ y $h(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)}=f(b)-f(a)-\left[f(b)-f(a)\right]=0$.

Aplicando el teorema de Rolle a la función $h(x)$, existirá un punto $c\in(a,b)$ tal que $h'(c)=0$.

Como $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tenemos que $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, luego:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Corolario:

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I$, si $f'(x)=0$ para todos los puntos del intervalo $I$, entonces la función $f(x)$ es constante en el intervalo $I$.

Demostración:

Sean $a<b$ dos puntos cualesquiera del intervalo $I$, como $f(x)$ es derivable en todos los puntos de $I$, es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, entonces existirá algún $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pero $f'(x)=0 \quad \forall x\in I$ con lo que $f'(c)=0$ y por tanto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, luego $f(b)=f(a)$ y la función es constante en el intervalo puesto que toma el mismo valor en cualquier pareja de puntos de $I$.

Corolario:

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas en el mismo intervalo $I$ y $f'(x)=g'(x)$ para todos los $x\in I$, entonces se diferencian en una constante, es decir, $f(x)=g(x)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

Demostración:

Para todo $x$ del intervalo $I$ se cumple $f'(x)=g'(x) \Rightarrow f'(x)-g'(x)=0 \Rightarrow (f-g)'(x)=0$, luego por el corolario anterior $(f-g)(x)=k \Rightarrow f(x)-g(x)=k$ para alguna constante $k\in\mathbb{R}$.

Corolario:

Si $f'(x)>0$ para todos los puntos de un intervalo $I$, entonces la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $I$. Si $f'(x)<0$ para todos los puntos de un intervalo $I$, entonces la función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $I$.

Demostración:

Supongamos que $f'(x) > 0$ y sean $a$ y $b$ dos puntos del intervalo $I$ con $a < b$. Como $f(x)$ es derivable en todos los puntos de $I$, es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, entonces existirá algún $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pero $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ con lo que tenemos $f'(c) > 0$ y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, luego $f(b) > f(a)$ para todo par de puntos de $I$ y la función es creciente en $I$.

Análogamente se demuestra el caso $f'(x) < 0$.

Ahora ya podemos decidir, en ciertos casos, cuáles de los puntos singulares de una función son máximos o mínimos.

Teorema:

Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x_0) = 0$.

- Si $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ tiene un mínimo en el punto $x = x_0$.
- Si $f''(x_0) < 0$, la función $f(x)$ tiene un máximo en el punto $x = x_0$.

Demostración:

$f''(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x_0+h)}{h}$. Si suponemos que $f''(x_0) > 0$, la fracción $\dfrac{f'(x_0+h)}{h}$ debe ser positiva para cualquier valor de $h$ en un entorno del cero. Así $f'(x_0+h) > 0$ si $h > 0$ y $f'(x_0+h) < 0$ si $h < 0$, luego la función $f(x)$ es decreciente en algún intervalo a la izquierda del punto $x = x_0$ y es creciente en algún intervalo a la derecha del punto $x = x_0$. Por tanto, en $x = x_0$, la función $f(x)$ presenta un mínimo. Análogamente se demuestra cuando $f''(x_0) < 0$.

El recíproco de este teorema no es cierto, sin embargo se verifica que si existe $f''(x_0)$ y $f(x)$ tiene un mínimo en $x = x_0$, entonces $f''(x_0) \geq 0$; y si existe $f''(x_0)$ y $f(x)$ tiene un máximo en $x = x_0$, entonces $f''(x_0) \leq 0$.

Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto $(a,b)$ entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $[g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c)$. En el caso de que $g'(x) \neq 0$ la igualdad se escribe $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Demostración:

Consideramos la función $h(x)=f(x)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]-g(x)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]$. Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, por ser suma de funciones continuas y derivables, y, además, $h(a)=h(b)$. Por el teorema de Rolle, existirá un punto $c\in(a,b)$ para el que $h'(c)=0$. Derivando obtenemos $h'(x)=f'(x)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]-g'(x)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]$ luego como $h'(c)=0$ nos queda $f'(c)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]-g'(c)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]=0$ y $f'(c)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]=g'(c)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]$.

Si $g'(x)\neq 0$, por el teorema de Rolle obligatoriamente $g(a)\neq g(b)$.

Seguidamente veremos un importante teorema que nos permitirá hallar límites que hasta ahora no nos era posible resolver.

Teorema (Regla de L´Hôpital):

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$.

Si existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces también existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración:

Que exista $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ quiere decir, en primer lugar, que existe un intervalo $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ donde $f'(x)$ y $g'(x)$ existen excepto, tal vez, en $x=x_0$ y en segundo lugar, que $g'(x)\neq 0$ en $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ salvo, tal vez, en $x=x_0$.

Si hacemos que $f(x_0)=g(x_0)=0$ obtendremos dos nuevas funciones (ampliadas las anteriores), que seguiremos llamando igual y que sólo se diferencian de las primeras en el punto $x=x_0$, hecho irrelevante cuando tomamos límites en el punto $x=x_0$.

Así $f(x)$ y $g(x)$ serán continuas en el punto $x=x_0$. Tomando un $x$ tal que $x_0<x<x_0+\delta$ y aplicando el teorema del valor medio a $g(x)$ en el intervalo $[x_0,x]$ se deduce que $g(x)\neq 0$, puesto que si fuese $g(x)=0$ existiría algún $c\in(x_0,x)$ tal que $g'(c)=0$ lo que no es posible por lo expuesto al inicio de esta demostración.

Aplicando el teorema de Cauchy a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[x_0,x]$ se deduce la existencia de un punto $\alpha_x$ (para cada $x$) tal que $f'(\alpha_x)\cdot\left[g(x)-g(x_0)\right]=g'(\alpha_x)\cdot\left[f(x)-f(x_0)\right]$.

Como $f(x_0)=g(x_0)=0$, nos queda $f'(\alpha_x)\cdot g(x)=g'(\alpha_x)\cdot f(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$.

Se llega a la misma igualdad si $x$ verifica $x_0-\delta<x<x_0$. Si ahora hacemos tender $x\to x_0$ tendremos que $\alpha_x\to x_0$, luego por existir $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

La regla de L´Hôpital se generaliza en varias direcciones. Así, si tenemos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ basta hacer el cambio de variable $x=\frac{1}{t}$ para demostrar el teorema anterior.

También es aplicable esta regla para indeterminaciones del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ cuando $x\to x_0$ o $x\to\infty$.

Ejemplos:

$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$, las funciones $f(x)=sen\,x$ y $g(x)=x$ son tales que $\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} g(x)$ y además existen las funciones derivadas $f'(x)=cos\,x$ y $g'(x)=1$, con lo que de aquí se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(sen\,x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x}{1}=1$$

---

$\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^3}$, al calcularlo nos dará una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, al aplicar la regla de L´hôpital obtendremos una nueva indeterminación $\frac{0}{0}$ que nos permitirá aplicar la regla una vez más y así sucesivamente hasta que la indeterminación desaparezca.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-sen\,x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cos\,x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(sen\,x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x}{6}=\frac{1}{6}$$

---

$\lim_{x\to 0^+}(tg\,x\cdot\ln x)$, nos encontramos con una indeterminación $0\cdot\infty$, que podemos convertir en $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+}(tg\,x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{cotg\,x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(cotg\,x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{sen^2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2x}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(sen^2x)'}{(-x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2sen\,x\cdot cos\,x}{-1}=0$$

---

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-cotg\,x\right)$, la indeterminación que aparece es $\infty-\infty$ que transformamos en $\frac{0}{0}$ restando.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-cotg\,x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{cos\,x}{sen\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x-x\cdot cos\,x}{x\cdot sen\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(sen\,x-x\cdot cos\,x)'}{(x\cdot sen\,x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x-cos\,x+x\cdot sen\,x}{sen\,x+x\cdot cos\,x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot sen\,x}{sen\,x+x\cdot cos\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cdot sen\,x)'}{(sen\,x+x\cdot cos\,x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x+x\cdot cos\,x}{cos\,x+cos\,x-x\cdot sen\,x}=\frac{0}{2}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0}(cos\,2x)^{\frac{1}{x^2}}$, indeterminación del tipo $1^{\infty}$ que transformamos en $\frac{0}{0}$ tomando logaritmos.

$$A=\lim_{x\to 0}(cos\,2x)^{\frac{1}{x^2}} \quad\Rightarrow\quad \ln A=\ln\left[\lim_{x\to 0}(cos\,2x)^{\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\ln(cos\,2x)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(cos\,2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(cos\,2x))'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\cdot sen\,2x}{cos\,2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg\,2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-tg\,2x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1+tg^2 2x)\cdot 2}{1}=\frac{-2}{1}=-2 \quad\Rightarrow\quad \ln A=-2\Rightarrow A=e^{-2} \quad\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}(cos\,2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$$

---

$\lim\limits_{x\to 0}(1+arctg\,x)^{\frac{a}{x}}$, nuevamente tenemos la indeterminación $1^{\infty}$ con lo que procedemos de igual modo.

$$A=\lim_{x\to 0}(1+arctg\,x)^{\frac{a}{x}} \quad\Rightarrow\quad \ln A=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+arctg\,x)^{\frac{a}{x}}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+arctg\,x)^{\frac{a}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+arctg\,x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a\ln(1+arctg\,x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+arctg\,x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{(1+x^2)(1+arctg\,x)}=\frac{a}{2} \quad\Rightarrow\quad \ln A=\frac{a}{2} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A=e^{\frac{a}{2}} \quad\Rightarrow\qquad \lim_{x\to 0}(1+arctg\,x)^{\frac{a}{x}}=\sqrt{e^a}$$

---

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$, nos encontramos con una indeterminación $\infty\cdot 0$, que podemos convertir en $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot e^x}{-\left(1+e^{2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\cdot e^x\right)'}{\left(-1-e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x}{-2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x^2}{-2e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x+x^2\right)'}{\left(-2e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2x}{-2e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)'}{\left(-e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-e^x}=0$$