SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Todo problema cuyo enunciado somete números desconocidos a varias condiciones, es susceptible de ser expresado por medio de igualdades o desigualdades que forman un sistema de ecuaciones o inecuaciones.

De ahí la importancia de decidir de manera sistemática cuántas soluciones tiene un sistema y cómo hallarlas todas. El objetivo general de este tema es discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales haciendo abstracción del tipo de problemas que originan su planteamiento.

Los casos más sencillos (dos ecuaciones con dos incógnitas y tres ecuaciones con tres incógnitas) ya se han estudiado en cursos anteriores. Aquí, como aplicación del álgebra lineal tratado con anterioridad (espacios vectoriales, matrices y determinantes), analizaremos el caso general: un número cualquiera de ecuaciones con un número cualquiera de incógnitas.

Primero definiremos con claridad el lenguaje que se va a utilizar en este tema: coeficientes, términos independientes, incógnitas, solución del sistema, discusión y resolución del sistema.

<u>Definición</u>: Se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de expresiones algebraicas de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $x_i \ (i = 1,2,3,\dots,n)$ son las incógnitas, los $a_{ij} \ (i = 1,2,3,\dots,m \ ; \ j = 1,2,3,\dots,n)$ son los coeficientes y los $b_i \ (i = 1,2,3,\dots,m)$ son los términos independientes. Los coeficientes y los términos independientes son números reales $\left(a_{ij} \in \mathbb{R} \ , \ b_i \in \mathbb{R}\right)$.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar valores reales para las incógnitas que verifiquen todas las ecuaciones del sistema a la vez. Cada conjunto de n valores reales que satisface todas las ecuaciones se llama solución del sistema.

Entonces, una solución del sistema son n números reales $\left(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\right)$, $s_i \in \mathbb{R}$ tales que al sustituirlos por las $x_i \ (i = 1,2,3,\dots,n)$ se cumplen todas las igualdades:

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2 \\ a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 + \cdots + a_{3n}s_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + a_{m3}s_3 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases}$$

Por tanto, una solución del sistema se puede considerar como un vector $\left(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\right)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Tipos de sistemas

La clasificación de los sistemas se hace atendiendo a la existencia de soluciones:

$$\begin{cases} \textit{Sistema incompatible}: \textit{no tiene solución} \\ \\ \textit{Sistema compatible}: \textit{tiene solución} \begin{cases} \textit{Sistema compatible determinado}: \textit{tiene solución única} \\ \\ \textit{Sistema compatible indeterminado}: \textit{tiene infinitas soluciones} \end{cases} \end{cases}$$

Notación matricial y notación vectorial

Los conocimientos adquiridos sobre matrices facilitan la escritura y el manejo de los sistemas de ecuaciones lineales. Dado un sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ podemos escribirlo: $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

El sistema puede escribirse de forma más simple como $A \cdot X = B$.

Una matriz que tendrá relevancia es $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ que se llama matriz ampliada.

El sistema también puede expresarse en forma vectorial: $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 + \cdots + A_n \cdot x_n = B$, donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \;;\; A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \;;\; A_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} \;;\; \dots \;;\; A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

En esta notación, las soluciones de un sistema son los vectores de la forma $S=\left(s_1\,,s_2\,,s_3\,,\ldots,s_n\right)\in\mathbb{R}^n$ que verifiquen la expresión $A_1\cdot s_1+A_2\cdot s_2+A_3\cdot s_3+\cdots+A_n\cdot s_n=B$.

Ejemplo:

Dado el sistema:

$\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3+x_4=-8\\x_1+x_2+2x_3-x_4=4\\x_1+x_2+x_3+2x_4=7\end{cases}$, en forma matricial será: $\begin{pmatrix}3&2&-3&1\\1&1&2&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\4\\7\end{pmatrix}$ y en forma vectorial $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot x_1+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot x_2+\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot x_3+\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot x_4=\begin{pmatrix}-8\\4\\7\end{pmatrix}$. El vector $S=\left(-1,1,3,2\right)\in\mathbb{R}^4$ es solución del sistema, ya que verifica: $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left(-1\right)+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left(1\right)+\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\left(3\right)+\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\left(2\right)=\begin{pmatrix}-8\\4\\7\end{pmatrix}$.

Definición: Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si toda solución del primero es solución del segundo y viceversa.

Definición: Decimos que una ecuación es combinación lineal de las ecuaciones de un sistema si se obtiene como resultado de sumar las ecuaciones del mismo, previamente multiplicadas por un número real.

Teorema fundamental de equivalencia

Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituye la ecuación i-ésima por una combinación lineal de dicha ecuación y las demás ecuaciones del sistema, siempre que el coeficiente que multiplique a dicha ecuación i-ésima sea distinto de cero, el sistema resultante es equivalente al primero.

Corolario

Si en un sistema de ecuaciones se suprime una ecuación que es combinación lineal de las restantes, el sistema obtenido es equivalente al dado.

Los resultados anteriores permiten ir transformando un sistema en otros equivalentes cuyas soluciones puedan obtenerse con más facilidad.

Método de eliminación de Gauss-Jordan

Este método, basado en el teorema y corolario anteriores, consiste en llegar a un sistema escalonado transformando la matriz ampliada $\overline{A}$ en una matriz escalonada por filas. Los siguientes ejemplos explican detalladamente el proceso a seguir.

- ✓ Ejemplo 1:

Resolver el sistema $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+3x_2+x_3=3\\5x_1-x_2+2x_3=2\end{cases}$

Consideramos la matriz ampliada asociada al sistema, separando por una línea vertical la columna de términos independientes de las restantes columnas que constituyen la matriz de coeficientes. Esto nos permite hacer transformaciones en las dos matrices simultáneamente.

$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 3 \\ 5 & -1 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$ Buscamos obtener un 1 en el primer elemento de la primera columna, en este ejemplo no es necesaria ninguna transformación puesto que es 1.

Denotamos por F_1 , F_2 , F_3 , las filas de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 3 \\ 5 & -1 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=-2F_1+F_2 \\ F_3=-5F_1+F_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & -6 & 7 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=6F_2+F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 25 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Volvemos al sistema que se corresponde con la última matriz obtenida que es un sistema escalonado equivalente al primero y cuya solución es inmediata:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ \quad x_2+3x_3=1 \\ \qquad 25x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1-\dfrac{16}{25}+\dfrac{3}{25} \Rightarrow x_1=\dfrac{12}{25} \\ x_2=1-\dfrac{9}{25} \Rightarrow x_2=\dfrac{16}{25} \\ x_3=\dfrac{3}{25} \end{cases}$$

Se trata, por tanto, de un sistema compatible determinado.

✓ Ejemplo 2:

Resolver el sistema $\begin{cases} 3x_1+3x_2+11x_3-x_4=8 \\ 2x_1+5x_3+3x_4=4 \\ x_1-x_2+2x_3+2x_4=2 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y procuramos tener un 1 en el lugar fila 1, columna 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 11 & -1 & \vdots & 8 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & \vdots & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Intercambiamos \\ F_1\ y\ F_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & \vdots & 4 \\ 3 & 3 & 11 & -1 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

Procedemos del mismo modo que en el ejemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & \vdots & 4 \\ 3 & 3 & 11 & -1 & \vdots & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=-2F_1+F_2 \\ F_3=-3F_1+F_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 6 & 5 & -7 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=-3F_2+F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema a resolver queda:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-1-13x_4}{2} \\ x_2 = \dfrac{-x_3 + x_4}{2} \Rightarrow x_2 = \dfrac{-1-x_4}{2} \\ 2x_3 = 2 + 4x_4 \Rightarrow x_3 = 1 + 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{13\lambda}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{2} \\ x_3 = 1 + 2\lambda \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones que se hallan dando valores reales al parámetro λ; por tanto el sistema es compatible indeterminado.

- ✓ Ejemplo 3:

Resolver el sistema $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y procuramos tener un 1 en el lugar fila 1, columna 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & 3 \\ 2 & 4 & 8 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Intercambiamos \\ F_1 \ y \ F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -2 \\ 2 & 4 & 8 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = -2F_1 + F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

Escribimos el sistema correspondiente a la última matriz y queda:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = -2 \\ 0 = -5 \end{cases}$, vemos que este sistema es incompatible.

REGLA DE CRAMER

<u>Definición</u>: Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

$$Sistema\ de\ Cramer \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ |A| \neq 0 \end{cases}$$

<u>Teorema:</u>

Todo sistema de Cramer tiene solución única y el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo por el determinante de la matriz de coeficientes, el determinante que resulta de sustituir en dicha matriz la columna correspondiente a los coeficientes de esa incógnita por la columna que forman los términos independientes. Esto es, en el siguiente sistema de Cramer:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3i}x_i + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ el valor de la incógnita x_i es:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{11} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{11} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$ donde los términos independientes están colocados en la columna *i*.

Demostración:

En el sistema de Cramer del teorema tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y el sistema se escribe en forma matricial: $A \cdot X = B$. Como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} y multiplicando la igualdad anterior, a la izquierda, por A^{-1}, se obtiene:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow\; I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$, esto en forma de matrices es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 + \cdots + A_{n1}b_n}{|A|} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 + \cdots + A_{n2}b_n}{|A|} \\ \dfrac{A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 + \cdots + A_{n3}b_n}{|A|} \\ \vdots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + A_{3n}b_3 + \cdots + A_{nn}b_n}{|A|} \end{pmatrix}$$

Y se obtiene que $x_i = \dfrac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3 + \cdots + A_{ni}b_n}{|A|}$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

El determinante $\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & \overbrace{\textit{columna } i}^{} & & \\ & & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{11} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \overset{\textit{desarrollamos por la columna i}}{=} A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3 + \cdots + A_{ni}b_n$

Por tanto podemos escribir $x_i = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{11} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$ y el teorema queda demostrado.

Utilicemos la regla de Cramer para resolver el ejemplo 1, abordado anteriormente por el método de Gauss-Jordan.

✓ Resolver el sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Calculamos el valor del determinante de la matriz de coeficientes

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 25 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = n = 3 \\ |A| = 25 \neq 0 \end{cases}$, estamos ante un sistema de Cramer.

Aplicamos la regla de Cramer para obtener la única solución de este sistema:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{25} = \frac{12}{25} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{25} = \frac{16}{25} \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{25} = \frac{3}{25}$$

TEOREMA DE ROUCHÉ – FRÖBENIUS. DISCUSIÓN DE SISTEMAS

Ahora estudiaremos el caso más general de sistemas de ecuaciones lineales y obtendremos la condición de compatibilidad, criterios de clasificación y un método general de resolución. Todo ello se basa en el siguiente teorema.

Teorema de Rouché-Fröbenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tengan igual rango: $Rang(A) = Rang(\overline{A})$.

Si el rango de ambas matrices es igual al número de incógnitas, la solución es única. Si el rango es menor que el número de incógnitas, hay infinitas soluciones. Resumiendo:

$$\boxed{\begin{array}{l} n = \textit{número de incógnitas} \\ Rang(A) = Rang(\overline{A}) = n \iff \textit{Sistema compatible determinado} \\ Rang(A) = Rang(\overline{A}) < n \iff \textit{Sistema compatible indeterminado} \\ Rang(A) < Rang(\overline{A}) \quad \iff \textit{Sistema incompatible} \quad \left(\textit{este caso sólo puede ser } Rang(A) + 1 = Rang(\overline{A})\right) \end{array}}$$

Demostración:

Consideramos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas escrito en forma vectorial:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \cdots + A_nx_n = B$$

($\Rightarrow$ Veamos la condición necesaria:

Supongamos que el sistema admite solución; sea el vector $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ una solución. Entonces, $A_1 s_1 + A_2 s_2 + A_3 s_3 + \cdots + A_n s_n = B$ y, por tanto, la columna de la matriz $\overline{A}$ formada por los términos independientes es combinación lineal de las restantes columnas de la matriz ampliada, por lo cual no aumenta el rango de A al añadirla para formar $\overline{A}$; luego $Rang(A) = Rang(\overline{A})$.

$\Leftarrow$) Veamos la condición suficiente:

Sea $Rang(A) = Rang(\overline{A})$. Como ambas matrices difieren en la columna formada por los términos independientes, dicha columna ha de ser combinación lineal de las restantes columnas de $\overline{A}$ y, por consiguiente, existen números reales $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ tales que $A_1 s_1 + A_2 s_2 + A_3 s_3 + \cdots + A_n s_n = B$.

Es decir, el vector $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ es solución del sistema.

Si $Rang(A) = Rang(\overline{A}) = k$, tomamos un menor de orden k distinto de cero (menor principal) en la matriz A, que se puede considerar formado por las k primeras filas y las k primeras columnas (ya que podemos alterar convenientemente el orden de las ecuaciones y el orden de las incógnitas); es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

Las $(n-k)$ filas restantes son combinación lineal de las anteriores; luego, el sistema inicial es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k = b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}x_n \end{cases} \qquad (*)$$

A las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_k$ las llamaremos incógnitas principales y a las $(n-k)$ incógnitas restantes, incógnitas secundarias.

Podemos considerar los términos en dichas incógnitas secundarias junto con los b_i de las k ecuaciones independientes del sistema inicial como los términos independientes del sistema $(*)$.

El sistema $(*)$ es, entonces, un sistema de Cramer pues tiene k ecuaciones con k incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero; por tanto, sabemos que tiene solución de la forma:

Columna i-ésima

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{1n}x_n) & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{2n}x_n) & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & (b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}x_n) & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}} \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

Si $k = n$, la columna i-ésima del determinante del numerador queda reducida a los términos independientes $b_1, b_2, \ldots, b_n$; por tanto, la solución es única y el sistema compatible determinado.

Si $k < n$, al calcular los valores x_i según la expresión anterior, hay infinitas soluciones, cada una de las cuales está determinada dando valores arbitrarios a las $(n-k)$ incógnitas secundarias, $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Vamos a aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius a la discusión y resolución de otro tipo particular de sistemas: los sistemas homogéneos.

<u>Definición</u>: Se llama sistema homogéneo a un sistema de ecuaciones lineales en el que los términos independientes son todos nulos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

En los sistemas homogéneos siempre $Rang(A) = Rang(\overline{A})$ (la matriz ampliada la obtenemos añadiendo una columna de ceros, con lo que el número de columnas linealmente independientes no varía) y, por tanto, siempre son compatibles.

En efecto, todo sistema homogéneo admite por lo menos la solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada solución trivial.

<u>Teorema</u>:

Es condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga solución distinta de la trivial, que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas.

Demostración:

Si en el sistema homogéneo anterior $Rang(A) = n^{\circ}\ de\ incógnitas$, según el teorema de Rouché-Fröbenius, la solución es única y será la trivial, es decir: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Luego, para que existan más soluciones, ha de ser obligatoriamente $Rang(A) < n^{\circ}\ de\ incógnitas$.

<u>Corolario</u>:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo con igual número de ecuaciones que de incógnitas tenga solución distinta de la trivial, es que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo.

La demostración es evidente a partir del teorema anterior.