PRODUCTOS DE VECTORES EN EL ESPACIO

Producto escalar:

Definición y propiedades:

Dados dos vectores no nulos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V_3, su producto escalar, que denotamos por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, es el número real:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

Si alguno de los vectores es nulo, su producto escalar es cero.

Entonces, podemos considerar el producto escalar como una aplicación,

$$\begin{aligned} V_3\times V_3 &\xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) &\longrightarrow f(\vec{u},\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

$$\left.\begin{array}{l} 1.-\ \textit{Definido positivo}:\ \vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0\ \ y\ \ \vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\ \textit{es el vector nulo.} \\ 2.-\ \textit{Simétrico}:\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u} \\ 3.-\ \textit{Bilineal}:\ \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})+\beta(\vec{u}\cdot\vec{w}) \end{array}\right\}\ \textit{donde}\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3\ \ y\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

De la definición tenemos que:

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}}\right) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot cos(0) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ *y como* $-1\leq cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\leq 1 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ *y* $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leq|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$. *Esta última desigualdad se conoce como desigualdad de Cauchy – Schwartz.*
- $cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Rightarrow cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}} \Rightarrow \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}}\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son perpendiculares,* $\vec{u}\perp\vec{v}$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores de V_3 y α es un número real, se verifica:

- $|\vec{u}|\geq 0$ *y* $|\vec{u}|=0$ *si y sólo si* $\vec{u}$ *es el vector nulo.*
- $|\alpha\vec{u}|=|\alpha||\vec{u}|$
- $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$

Expresión analítica del producto escalar:

Si dos vectores de V_3, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, están expresados en la base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, de tal forma que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3 \ \rightarrow\ \vec{u}=(a,b,c)\ en\ B \\ \vec{v}=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3 \ \rightarrow\ \vec{v}=(a',b',c')\ en\ B \end{array}\right|$$

entonces, podemos expresar el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la siguiente forma:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3)\cdot(a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3)$ *y aplicando la propiedad de que el producto escalar es bilineal, tenemos*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+ab'\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+ac'\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3+ba'\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+bb'\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+bc'\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3+ca'\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1+cb'\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2+cc'\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3$$

En forma matricial se escribiría: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' \\ b' \\ c'\end{pmatrix}$

$La\ matriz\ A=\begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \end{pmatrix}$ *se llama matriz del producto escalar.*

Como $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\vec{e}_j\cdot\vec{e}_i \quad \Rightarrow$ *A es una matriz simétrica.*

Si $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ *es una base ortonormal, es decir,* $\begin{cases} |\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1 \\ \vec{e}_1\perp\vec{e}_2\ ,\ \vec{e}_1\perp\vec{e}_3\ ,\ \vec{e}_2\perp\vec{e}_3 \end{cases}$ *tenemos que* $\begin{cases} \vec{e}_i\cdot\vec{e}_i=|\vec{e}_i|^2=1 \\ \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0 \end{cases}$ *con lo que*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'$$

Ejemplo:

Sea $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ *es una base de* V_3 *tal que* $\begin{cases} |\vec{e}_1|=1\ ,\ |\vec{e}_2|=\sqrt{3}\ ,\ |\vec{e}_3|=2 \\ \left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2}\right)=30^\circ\ ,\ \left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_3}\right)=120^\circ\ ,\ \left(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}_3}\right)=90^\circ \end{cases}$

Dados los vectores $\begin{cases} \vec{u}=(2,-2,3)\ en\ B \\ \vec{v}=(-2,4,1)\ en\ B \end{cases}$ *, calcula el ángulo que forman los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

Como $cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}}$ *, necesitamos calcular los productos* $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ *y* $\vec{v}\cdot\vec{v}$. *Para ello obtenemos la matriz del producto escalar* $A=\begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=|\vec{e}_1|^2=1\ ;\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=|\vec{e}_2|^2=3\ ;\ \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3=|\vec{e}_3|^2=4 \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=|\vec{e}_1||\vec{e}_2|cos\,30^\circ=1\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=|\vec{e}_1||\vec{e}_3|cos\,120^\circ=1\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1 \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=|\vec{e}_2||\vec{e}_3|cos\,90^\circ=\sqrt{3}\cdot 2\cdot 0=0 \end{array} \right. \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Ahora \begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}=6 \\ \vec{u}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}=28 \\ \vec{v}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}=36 \end{cases} \rightarrow cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{6}{\sqrt{28}\cdot\sqrt{36}} \rightarrow \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)\simeq 79^\circ$$

Producto vectorial:

Definición y propiedades:

Dados dos vectores de V_3, $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *expresados en la base ortonormal* $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, *de tal forma que:*

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3 \;\rightarrow\; \vec{u}=(a,b,c) \text{ en } B\\ \vec{v}=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3 \;\rightarrow\; \vec{v}=(a',b',c') \text{ en } B\end{array}\right|$$

su producto vectorial, que denotaremos por $\vec{u}\wedge\vec{v}$, *es otro vector de* V_3 *cuyas coordenadas son:* $\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c & a\\ c' & a'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\right)$

Esto quiere decir que $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}\vec{e}_1+\begin{vmatrix}c & a\\ c' & a'\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\vec{e}_3=\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\vec{e}_3 \;\Rightarrow\; \vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}$

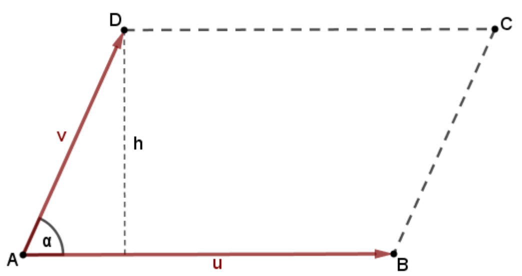
Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *de* V_3 *y el número real* α, *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$
2. $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
3. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
4. $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\,sen\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$
5. *El vector* $\vec{u}\wedge\vec{v}$ *es perpendicular a* $\vec{u}$ *y a* $\vec{v}$.
6. *Si* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son linealmente dependientes,* $\vec{u}=\lambda\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

La demostración de estas propiedades se basa en algunas de las propiedades de los determinantes.

Interpretación geométrica del producto vectorial.

Dados los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *de* V_3, $\vec{u}\neq\lambda\vec{v}$, *consideramos el siguiente paralelogramo:*



$$A_{paralelogramo}=base\times altura \;\Rightarrow\; A_{paralelogramo}=|\vec{u}|\cdot h$$

$$h=|\vec{v}|\,sen\,\alpha \;\Rightarrow\; h=|\vec{v}|\,sen\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

$$A_{paralelogramo}=|\vec{u}||\vec{v}|\,sen\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \;\Rightarrow\; A_{paralelogramo}=|\vec{u}\wedge\vec{v}|$$

Dados los puntos A, B y D, el área del triángulo ABD es:

$$A_{triángulo\ ABD}=\frac{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}{2}$$

Ejemplo:

Calcula el área del triángulo que determinan los puntos $A(1,-1,3)$, $B(-2,4,1)$ *y* $C(3,0,-1)$

$$A_{triángulo\ ABC}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-3,5,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(2,1,-4)\end{cases} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -3 & 5 & -2\\ 2 & 1 & -4\end{vmatrix}=-18\vec{e}_1-16\vec{e}_2-13\vec{e}_3$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-18)^2+(-16)^2+(-13)^2}=\sqrt{749} \;\Rightarrow\; A_{triángulo\ ABC}=\frac{\sqrt{749}}{2}\simeq 13,68\ u^2$$

Producto mixto:

Definición y propiedades:

Dados tres vectores de V_3, $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$, *expresados en la base ortonormal* $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, *de tal forma que:*

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3 \quad \rightarrow \quad \vec{u}=(a,b,c) \text{ en } B \\ \vec{v}=a'\vec{e}_1+b'\vec{e}_2+c'\vec{e}_3 \quad \rightarrow \quad \vec{v}=(a',b',c') \text{ en } B \\ \vec{w}=a''\vec{e}_1+b''\vec{e}_2+c''\vec{e}_3 \quad \rightarrow \quad \vec{w}=(a'',b'',c'') \text{ en } B \end{array}\right| \text{ su producto mixto, que denotaremos por } [\vec{u},\vec{v},\vec{w}], \text{ es el número real } \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}).$$

$$\text{Como} \quad \vec{v}\wedge\vec{w}=\left(\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}\right)$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\text{Entonces} \quad [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

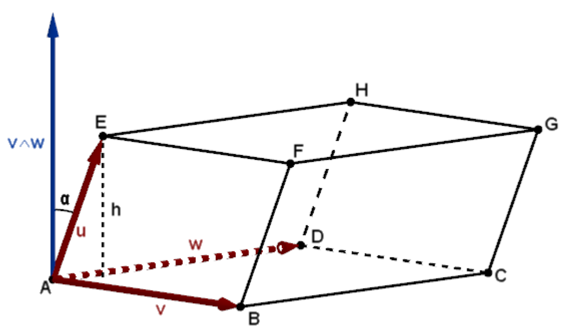
Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *y* $\vec{x}$ *de* V_3 *y el número real* α, *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$
2. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$
3. $[\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\alpha[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$
4. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{x}]=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u},\vec{v},\vec{x}]$
5. $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *son linealmente dependientes* $\Leftrightarrow$ $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$

La demostración de estas propiedades se basa en algunas de las propiedades de los determinantes.

Interpretación geométrica del producto mixto.

Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *de* V_3, *linealmente independientes, consideramos el siguiente paralelepípedo:*



$$V_{paralelepípedo}=A_{base}\times altura=A_{paralelogramo}\cdot h$$

$$A_{base}=|\vec{v}\wedge\vec{w}|$$

$$h=|\vec{u}||\cos\alpha| \Rightarrow h=|\vec{u}|\left|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\wedge\vec{w}}\right)\right|$$

$$V_{paralelepípedo}=|\vec{v}\wedge\vec{w}||\vec{u}|\left|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\wedge\vec{w}}\right)\right|=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})|$$

$$V_{paralelepípedo}=|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *determinan un tetraedro cuyo volumen es*

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}V_{paralelepípedo}=\frac{1}{6}|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$$