EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES

Definición y tipos de matrices.

Se llama matriz de orden (o dimensión) $n\times m$ a una tabla de números reales dispuestos en filas y columnas de la manera siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$; de forma abreviada, escribiremos $A=\left(a_{ij}\right)$ con $\left| \begin{array}{l} i\in\{1,2,3,\dots,n\} \\ j\in\{1,2,3,\dots,m\} \end{array} \right.$

A los números reales a_{ij} se les llama elementos de la matriz, dónde el primer subíndice representa la fila en la que está situado el elemento y el segundo subíndice, la columna.

Al conjunto de las matrices de orden (o dimensión) $n\times m$ lo denotaremos por $M_{n\times m}$.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 & \pi & 0 \end{pmatrix}$$, A es una matriz de orden 3×5, $A\in M_{3\times 5}$ y, por ejemplo, $a_{24}=6$

Definición:

Se dice que dos matrices son iguales, si tienen el mismo orden y si coinciden los elementos que ocupan igual fila y columna.

Es decir $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$ son iguales si para todo $i\in\{1,2,3,\dots,n\}$ y para todo $j\in\{1,2,3,\dots,m\}$ se cumple que $a_{ij}=b_{ij}$.

Definición:

Se llama matriz cuadrada, a toda matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, A es cuadrada si $A\in M_{n\times n}$. Diremos que A es una matriz de orden n.

Definición:

Se llama matriz fila, a toda matriz de orden $1\times m$. Se llama matriz columna, a toda matriz de orden $n\times 1$.

Definición:

Se llama matriz nula de orden $n\times m$, a la matriz que todos sus elementos son 0.

Definición:

Se llama matriz diagonal, a toda matriz cuadrada que tiene todos los elementos nulos, salvo los de la diagonal principal, que pueden ser nulos o no serlo. Es decir A es diagonal si $A\in M_{n\times n}$ y $a_{ij}=0$ cuando $i\neq j$.

Definición:

Se llama matriz triangular, a toda matriz cuadrada en la que son nulos todos los elementos que están situados por encima (o por debajo) de la diagonal principal. Es decir A es diagonal si $A\in M_{n\times n}$ y $a_{ij}=0$ cuando $i<j$ (o cuando $i>j$).

Definición:

Se llama matriz unidad de orden n, a una matriz diagonal de orden n, de tal forma que los elementos de la diagonal principal son todos 1. Es decir I_n es la matriz unidad de orden n si $I_n\in M_{n\times n}$, $a_{ij}=1$ cuando $i=j$ y $a_{ij}=0$ cuando $i\neq j$.

Definición:

Se llama matriz traspuesta de una matriz A, y la denotamos por A^T, a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas sin alterar su orden de colocación. Es decir, si $A=\left(a_{ij}\right)\Rightarrow A^T=\left(a_{ji}\right)$. Por tanto, si $A\in M_{n\times m}$, entonces $A^T\in M_{m\times n}$.

Definición:

Se dice que una matriz A es simétrica cuando $A=A^T$. Es decir, cuando $A\in M_{n\times n}$ y $a_{ij}=a_{ji}$.

Definición:

Se dice que una matriz A es antisimétrica (o hemisimétrica) cuando $A^T=-A$. Es decir, cuando $A\in M_{n\times n}$, $a_{ij}=-a_{ji}$ cuando $i\neq j$ y $a_{ij}=0$ cuando $i=j$.

EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES $n \times m$

Definición:

Se llama suma de matrices del mismo orden, a la aplicación que asocia a cada par de matrices otra matriz, del mismo orden, cuyos elementos se obtienen sumando, término a término, los elementos correspondientes de dichas matrices.

$$\begin{array}{ccc} M_{n\times m} \times M_{n\times m} & \xrightarrow{\ +\ } & M_{n\times m} \\ (A \ , \ \ B) & \xrightarrow{\ +\ } & A+B \end{array}$$

Esto es, dadas $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$, entonces:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3m}+b_{3m} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada, $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right) \ \Rightarrow \ A+B=\left(c_{ij}\right)$ con $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Definición:

Se llama producto de un número real por una matriz, a la aplicación que asocia a cada par formado por un número real y una matriz, otra matriz del mismo orden, cuyos elementos se obtienen multiplicando el número real por todos los elementos de la matriz.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M_{n\times m} & \xrightarrow{\ \cdot\ } & M_{n\times m} \\ (\lambda \ , \ A) & \xrightarrow{\ \cdot\ } & \lambda \cdot A \end{array}$$

Esto es, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{n\times m}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, entonces

$$\lambda \cdot A=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \lambda\cdot a_{13} & \dots & \lambda\cdot a_{1m} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \lambda\cdot a_{23} & \dots & \lambda\cdot a_{2m} \\ \lambda\cdot a_{31} & \lambda\cdot a_{32} & \lambda\cdot a_{33} & \cdots & \lambda\cdot a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\cdot a_{n1} & \lambda\cdot a_{n2} & \lambda\cdot a_{n3} & \dots & \lambda\cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada, $A=\left(a_{ij}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \lambda\cdot A=\left(b_{ij}\right)$ con $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

Teorema: (estructura de las matrices)

El conjunto $M_{n\times m}$ de las matrices de orden $n\times m$, en el cual se ha definido la suma de matrices (operación interna) y el producto de un número real por una matriz (operación externa), tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio.

PRODUCTO DE MATRICES

Definición:

Se llama producto de matrices a la aplicación que asocia a cada par de matrices, una de orden $n\times m$ y otra de orden $m\times r$, una tercera matriz de orden $n\times r$.

$$\begin{array}{ccc} M_{n\times m}\times M_{m\times r} & \longrightarrow & M_{n\times r} \\ (A \ , \ B) & \longrightarrow & AB=C \end{array}$$

De tal forma que si $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{jk}\right) \quad\Rightarrow\quad AB=C=\left(c_{ik}\right)$ con $c_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\cdot b_{jk}$. Es decir, el elemento de la matriz C que ocupa el lugar de la fila i, columna k, se obtiene sumando los productos entre los elementos de la fila i de la matriz A y los elementos de la columna k de la matriz B, de la siguiente forma: $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+a_{i3}\cdot b_{3k}+\ldots+a_{im}\cdot b_{mk}$

Por tanto, para poder efectuar el producto AB, es necesario que el número de columnas de la matriz A coincida con el número de filas de la matriz B. En ese caso, la matriz AB tendrá el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; AB=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot(-2) & 2\cdot 1+1\cdot 1 & 2\cdot 2+1\cdot(-3) \\ 0\cdot 3+4\cdot(-2) & 0\cdot 1+4\cdot 1 & 0\cdot 2+4\cdot(-3) \\ (-3)\cdot 3+(-1)\cdot(-2) & (-3)\cdot 1+(-1)\cdot 1 & (-3)\cdot 2+(-1)\cdot(-3) \\ 5\cdot 3+3\cdot(-2) & 5\cdot 1+3\cdot 1 & 5\cdot 2+3\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & -12 \\ -7 & -4 & -3 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:

1. En general, no es conmutativo. Esto quiere decir que, aunque existen matrices que conmutan, es muy probable que ocurra que existiendo AB, no exista BA, o que existiendo AB y BA, $AB\neq BA$.

   Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} \\ BA=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Asociativa: Si tenemos tres matrices $A\in M_{n\times m}$, $B\in M_{m\times p}$ y $C\in M_{p\times r}$, se verifica $(AB)C=A(BC)$, que será una matriz de orden $n\times r$.

3. Elemento neutro: La matriz unidad de orden n, I_n, es el elemento neutro para el producto de matrices cuadradas de ese orden. Si $A\in M_{n\times n} \Rightarrow AI_n=I_nA=A$.

4. No todas las matrices cuadradas tienen matriz inversa con el producto, con lo que no se cumple la propiedad de existencia de elemento inverso. No obstante, algunas (infinitas) matrices cuadradas tienen inversa, que la denotamos por A^{-1} y se cumple que $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$.

5. Distributiva respecto de la suma de matrices: Si $A\in M_{n\times m}$ y $B,C\in M_{m\times p}$, se cumple: $A(B+C)=AB+AC$

6. Tiene divisores de cero: esto quiere decir que existen matrices A y B, distintas de la matriz nula, tales que $AB=0$.

   Ejemplo:
$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\5&3\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 5 & 1\cdot 0+0\cdot 3\\2\cdot 0+0\cdot 5 & 2\cdot 0+0\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

RANGO DE UNA MATRIZ

Introducimos ahora uno de los conceptos más importantes del Álgebra Lineal y que estudiaremos con mayor profundidad en el tema de Determinantes.

<u>Definición:</u>

Dada una matriz de orden $n\times m$, podemos considerar los elementos de cada fila como las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^m$. Así, la matriz estaría compuesta por n vectores fila de m coordenadas cada uno.

Del mismo modo, podemos considerar los elementos de cada columna como las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^n$. Así, la matriz estaría compuesta por m vectores columna de n coordenadas cada uno.

Definimos el rango por filas de la matriz como el número de vectores fila linealmente independientes entre sí. Análogamente, definimos el rango por columnas de la matriz como el número de vectores columna linealmente independientes entre sí.

En el próximo tema veremos que el rango por filas y el rango por columnas de una matriz A, coinciden y, a ese único número, le denotamos por $Rang\ A$.

Aplicando lo estudiado en el tema de Espacios Vectoriales, podemos concluir que el rango de una matriz de orden $n\times m$, no puede ser mayor que el menor de los dos números n y m. Supongamos que $n<m$, n es el número de filas y, por tanto, el máximo número de vectores fila linealmente independientes. Por otro lado, los m vectores columna tendrían n coordenadas, con lo que pertenecen a un espacio vectorial de dimensión n, en el que no puede haber más de n vectores linealmente independientes. Entonces concluimos que el número de vectores fila, o columna, linealmente independientes, no es mayor que n.