FUNDAMENTOS DE LOS ESPACIOS VECTORIALES ABSTRACTOS

Primeros ejemplos.

Consideremos el conjunto V_2 de los vectores libres del plano. Recordemos que la operación de sumar vectores verificaba las siguientes propiedades:

- Asociativa: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ para todos $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_2$
- Conmutativa: Para todos $\vec{u},\vec{v}\in V_2$ se cumple que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Elemento neutro: existe el vector nulo $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ para todo $\vec{u}\in V_2$
- Elemento opuesto: dado cualquier vector $\vec{u}\in V_2$, existe otro vector $(-\vec{u})\in V_2$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

También, recordemos que el producto de un vector libre por un número real verificaba las propiedades:

- $\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\cdot\vec{u}+\alpha\cdot\vec{v}\quad\forall\alpha\in\mathbb{R}$ y todos $\vec{u},\vec{v}\in V_2$
- $(\alpha+\beta)\cdot\vec{u}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{u}\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y todo $\vec{u}\in V_2$
- $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{u})=(\alpha\beta)\cdot\vec{u}\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y todo $\vec{u}\in V_2$
- $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ para todo $\vec{u}\in V_2$

Sea el conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}=\{z=a+bi\ /\ a,b\in\mathbb{R}\}$. En $\mathbb{C}$ se definen dos operaciones:

- Una interna, suma de complejos: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- Otra externa, el producto de un número real por un complejo: $\lambda\cdot(a+bi)=\lambda a+\lambda bi$

Con respecto a la suma de complejos se verifican las siguientes propiedades:

- Asociativa: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3\ ,\ \forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$
- Conmutativa: $z_1+z_2=z_2+z_1\ ,\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$
- Elemento neutro: existe el complejo $z_0=0+0i$, tal que $z+z_0=z\ ,\ \forall z\in\mathbb{C}$
- Elemento opuesto: Dado el complejo $z=a+bi$ existe $z'=-a-bi$ tal que $z+z'=z_0$

Respecto del producto por números reales se verifican las propiedades:

- $\lambda\cdot(z_1+z_2)=\lambda\cdot z_1+\lambda\cdot z_2$
- $(\lambda+\mu)\cdot z_1=\lambda\cdot z_1+\mu\cdot z_1\qquad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\ ,\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$
- $(\lambda\mu)\cdot z_1=\lambda\cdot(\mu\cdot z_1)$
- $1\cdot z_1=z_1$

Sea $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x\in\mathbb{R} \ , \ y\in\mathbb{R}\}$

En $\mathbb{R}^2$ se definen dos operaciones,

- Una interna, suma de pares ordenados: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- Otra externa, producto de un número real por un par ordenado: $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x \ , \ \lambda y)$

Respecto a la suma de pares ordenados se verifican las propiedades:

- Asociativa: $(x, y) + \left[(x', y') + (x'', y'')\right] = \left[(x, y) + (x', y')\right] + (x'', y'')$
- Conmutativa: $(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y)$
- Elemento neutro: existe el par ordenado $(0,0)$ tal que $(x, y) + (0,0) = (x, y)$
- Elemento opuesto: dado un par ordenado (x, y) existe otro par $(-x, -y)$ tal que $(x, y) + (-x, -y) = (0,0)$

Con respecto al producto de números reales por pares ordenados se verifican las propiedades:

- $\lambda \cdot \left[(x, y) + (x', y')\right] = \lambda \cdot (x, y) + \lambda \cdot (x', y')$
- $(\lambda + \mu) \cdot (x, y) = \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y)$
- $(\lambda\mu) \cdot (x, y) = \lambda \cdot \left[\mu \cdot (x, y)\right]$
- $1 \cdot (x, y) = (x, y)$

Todo esto para cualquier par ordenado de $\mathbb{R}^2$ y $\lambda, \ \mu \in \mathbb{R}$.

Consideremos el conjunto P_2 de los polinomios en x con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2.

En P_2 se pueden definir dos operaciones:

- Una interna, suma de polinomios:
  $\left(ax^2 + bx + c\right) + \left(a'x^2 + b'x + c'\right) = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$
- Otra externa, producto de un número real por un polinomio:
  $\lambda \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$

Se comprueba con facilidad que se verifican las cuatro propiedades con la suma y las cuatro con el producto de los ejemplos anteriores.

Noción de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales

La abundancia de conjuntos como los anteriores, donde en todos pueden definirse dos operaciones, una interna en la que sumamos elementos del conjunto y obtenemos otro elemento del mismo conjunto y otra externa en la que multiplicamos un elemento del conjunto por un número real, obteniendo un nuevo elemento del conjunto, y tales que se verifican esas ocho propiedades, llevó a los matemáticos a estudiar todos los casos a la vez desde un punto de vista general, de modo que cuantas conclusiones se obtengan del estudio abstracto puedan aplicarse luego a cada caso particular.

Así, el nuevo objeto de estudio será un conjunto cualquiera con las dos operaciones ya mencionadas, que llamaremos espacio vectorial.

Definición:

Un conjunto E es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales cuando en él se han definido dos operaciones, una interna, que llamaremos suma y que se representa por +, $\mathrm{E}\times\mathrm{E}\xrightarrow{+}\mathrm{E}$, y otra externa, que llamaremos producto por números reales, representada por el símbolo $\cdot$, $\mathbb{R}\times\mathrm{E}\xrightarrow{\cdot}\mathrm{E}$, tal que para cualesquiera $a\,,\,b,\,c\in\mathrm{E}$ y $\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}$ se cumple:

- Respecto de la operación interna se verifican las siguientes propiedades:
  1) Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$
  2) Existencia de elemento neutro: $\exists\, 0\in\mathrm{E}\ /\ 0+a=a+0=a\ ,\ \forall a\in\mathrm{E}$
  3) Existencia de elemento opuesto: $\forall a\in\mathrm{E}\ ,\ \exists\, a'\in\mathrm{E}\ /\ a+a'=a'+a=0$. Al elemento opuesto de a se le denota por $(-a)$.
  4) Conmutativa: $a+b=b+a$.

- Respecto de la operación externa se verifican las siguientes propiedades:
  1) Distributiva de la ley externa respecto de la interna en E : $\alpha\cdot(a+b)=\alpha\cdot a+\alpha\cdot b$
  2) Distributiva de la ley externa respecto de la suma de $\mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)\cdot a=\alpha\cdot a+\beta\cdot a$
  3) Asociativa mixta: $\alpha\cdot(\beta\cdot a)=(\alpha\beta)\cdot a$
  4) Neutralidad de la ley externa: $1\cdot a=a$

A este conjunto con estas operaciones se le suele denotar por $(\mathrm{E}\ ,+\ ,\cdot\ ,\mathbb{R})$, y se dice que E es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial. Los elementos de E se llaman vectores y los escribiremos con letras latinas; los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman escalares y los escribimos con letras griegas.

Los cuatro conjuntos de los primeros ejemplos con las operaciones allí definidas son $\mathbb{R}$- espacios vectoriales.

Proposición:

Para todo a de un espacio vectorial E y todo α de $\mathbb{R}$, se verifica:

1) $0\cdot a=0$
2) $\alpha\cdot 0=0$
3) $(-\alpha)\cdot a=\alpha\cdot(-a)=-(\alpha\cdot a)$
4) $(-1)\cdot a=-a$
5) Si $\alpha\cdot a=0$, entonces $\alpha=0$ o $a=0$

Demostración:

1) Tenemos que $a = 1 \cdot a = (1+0) \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = a + 0 \cdot a \Rightarrow a = a + 0 \cdot a$, entonces sumando en ambos lados el opuesto de a obtenemos que $0 = 0 \cdot a$.

2) Para todo a de E y todo α de $\mathbb{R}$ es $\alpha \cdot a + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (a+0) = \alpha \cdot a \Rightarrow \alpha \cdot a + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot a$, entonces sumando en ambos miembros el opuesto del vector $\alpha \cdot a$ obtenemos que $\alpha \cdot 0 = 0$.

3) Como $0 = 0 \cdot a = \left[\alpha + (-\alpha)\right] \cdot a = \alpha \cdot a + (-\alpha) \cdot a \Rightarrow (-\alpha) \cdot a$ es el opuesto de $\alpha \cdot a$, es decir $(-\alpha) \cdot a = -(\alpha \cdot a)$. Análogamente se prueba que $\alpha \cdot (-a) = -(\alpha \cdot a)$.

4) Utilizando lo obtenido en el apartado anterior: $(-1) \cdot a = -(1 \cdot a) = -a$.

5) Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces existe α^{-1}, y, como $\alpha \cdot a = 0$ si multiplicamos ambos miembros por α^{-1} tenemos $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot a) = \alpha^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot a = 0 \Rightarrow 1 \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$

Proposición:
Todos los elementos distintos de los elementos neutros de E y de $\mathbb{R}$ para las respectivas sumas verifican:

$$\begin{array}{l} Si \quad \alpha \cdot a = \alpha \cdot b \quad \Rightarrow \quad a = b \ , \quad \forall \alpha \neq 0 \\ Si \quad \alpha \cdot a = \beta \cdot a \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta \ , \quad \forall a \neq 0 \end{array}$$

Subespacios vectoriales

Definición: Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales; se llama subespacio vectorial de E sobre $\mathbb{R}$ a todo subconjunto $A \subset \mathrm{E}$ tal que teniendo en cuenta las dos operaciones (interna y externa) definidas para E, A es un espacio vectorial.

Teorema (Caracterización de un subespacio vectorial)
La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto A de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E sea un subespacio vectorial es que para cualesquiera que sean $a, b \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifique:

$$\begin{cases} a + b \in A \\ \alpha \cdot a \in A \end{cases}$$

Demostración:
Condición necesaria: Si A es un subespacio vectorial de E, A es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y obviamente se verifican las condiciones del teorema.

Condición suficiente: Suponemos que se verifica que para todos $a, b \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es $a + b \in A$ y $\alpha \cdot a \in A$. Veamos que A es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
Como $\alpha \cdot a \in A$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, en particular $0 \cdot a = 0 \in A$, con lo que A contiene al vector cero, A tiene elemento neutro. Además, para todo $a \in A$, $(-1) \cdot a = -a \in A$; por tanto, el opuesto de cualquier vector de A está en A.

Entonces, la suma de vectores de A tiene las cuatro propiedades necesarias para ser espacio vectorial puesto que las propiedades asociativa y conmutativa las hereda de E (todos los vectores de E las cumplen y los vectores de A también lo son de E). De igual modo, las cuatro propiedades necesarias relacionadas con el producto de vectores de A por escalares también las hereda de E .

A partir de este teorema es evidente la siguiente afirmación:

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto A de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E sea un subespacio vectorial es que para cualesquiera que sean $a,b\in A$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ se verifique: $\alpha\cdot a+\beta\cdot b\in A$

Ejemplos:

- ✓ Probar que el subconjunto $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+y=0\ ,\ 2x-y+3z=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Tomamos dos elementos $a,b\in A\Rightarrow\ a=(x,y,z)$ *con* $\begin{cases}x+y=0\\2x-y+3z=0\end{cases}$ *y* $b=(x',y',z')$ *con* $\begin{cases}x'+y'=0\\2x'-y'+3z'=0\end{cases}$

veamos que $a+b\in A$; $a+b=(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\in A$ *puesto que*:

$$\begin{cases}(x+x')+(y+y')=(x+y)+(x'+y')=0+0=0\\2(x+x')-(y+y')+3(z+z')=2x+2x'-y-y'+3z+3z'=(2x-y+3z)+(2x'-y'+3z')=0+0=0\end{cases}$$

Comprobamos ahora que $\alpha\cdot a\in A$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$; $\alpha\cdot a=\alpha\cdot(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)\in A$ *puesto que*:

$$\begin{cases}\alpha x+\alpha y=\alpha(x+y)=\alpha\cdot 0=0\\2(\alpha x)-(\alpha y)+3(\alpha z)=\alpha(2x-y+3z)=\alpha\cdot 0=0\end{cases}$$

Por tanto A *es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

- ✓ Comprobar si el subconjunto $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\quad x+2y-3z=4\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Tomamos dos elementos $a,b\in B\Rightarrow\ a=(x,y,z)$ *con* $x+2y-3z=4$ *y* $b=(x',y',z')$ *con* $x'+2y'-3z'=4$

veamos si $a+b\in B$; $a+b=(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\notin B$ *puesto que*:

$$(x+x')+2(y+y')-3(z+z')=x+x'+2y+2y'-3z-3z'=(x+2y-3z)+(x'+2y'-3z')=4+4=8\neq 4$$

Por tanto B *no es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

<u>Definición:</u> Se dice que un vector $u\in E$ es combinación lineal del conjunto o sistema de n vectores $\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ de E cuando existen n elementos de $\mathbb{R}$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\}$, tales que: $u=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\alpha_3\cdot e_3+\cdots+\alpha_n\cdot e_n$

Ejemplo:

Dados los vectores $e_1=(1,-1,0)$ y $e_2=(-1,2,-1)$ de $\mathbb{R}^3$, el vector $u=(4,-5,1)$ es combinación lineal del sistema formado por los dos vectores anteriores puesto que existen $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ tales que $u=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2$. En efecto:

$$u=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2 \Leftrightarrow (4,-5,1)=\alpha_1\cdot(1,-1,0)+\alpha_2\cdot(-1,2,-1) \Leftrightarrow (4,-5,1)=(\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_1+2\alpha_2,-\alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=4\\ -\alpha_1+2\alpha_2=-5\\ -\alpha_2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=3\\ \alpha_2=-1\end{cases} \Rightarrow u=3\cdot e_1-e_2$$

Teorema:
Sea S un conjunto finito o infinito de vectores de un espacio vectorial E. Entonces, el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de un número finito de elementos de S es un subespacio vectorial de E llamado "*cierre lineal de* S" o "*subespacio generado por* S", que denotamos por $\langle S\rangle$ o $\overline{S}$.

Demostración:
Dados dos vectores cualesquiera $u,v\in\langle S\rangle$, tenemos que tanto u como v son combinación lineal de un número finito de elementos de S. Por tanto para cualquier par de números $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ es evidente que $\alpha\cdot u+\beta\cdot v$ es combinación lineal de un número finito de elementos de S y, en consecuencia, $\alpha\cdot u+\beta\cdot v\in\langle S\rangle$. Con esto queda probado que $\langle S\rangle$ es un subespacio vectorial, contenido en E.

Definición: Se dice que un sistema de vectores S es un sistema de generadores para un espacio vectorial E, si el subespacio generado por S coincide con E, $\langle S\rangle=E$.

Esto quiere decir que S es sistema de generadores para E cuando cualquier vector de E se puede expresar como combinación lineal de un número finito de vectores de S.

Ejemplo:
Consideramos los vectores de $\mathbb{R}^3$ $e_1=(1,-1,1)$, $e_2=(0,2,-1)$, $e_3=(1,0,2)$. Veamos que $S=\{e_1,e_2,e_3\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^3$.

$$u=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\alpha_3\cdot e_3 \Leftrightarrow (x,y,z)=\alpha_1\cdot(1,-1,1)+\alpha_2\cdot(0,2,-1)+\alpha_3\cdot(1,0,2) \Leftrightarrow$$

$$(x,y,z)=(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3) \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=x\\ -\alpha_1+2\alpha_2=y\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha_2+\alpha_3=x+y\\ \alpha_2+2\alpha_3=y+z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\alpha_2-\alpha_3=-x-y\\ 2\alpha_2+4\alpha_3=2y+2z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1=\frac{4x-y-2z}{3} \quad , \quad \alpha_2=\frac{2x+y-z}{3} \quad , \quad \alpha_3=\frac{-x+y+2z}{3}$$

Luego $u=(x,y,z)=\frac{4x-y-2z}{3}\cdot(1,-1,1)+\frac{2x+y-z}{3}\cdot(0,2,-1)+\frac{-x+y+2z}{3}\cdot(1,0,2)$ *y, en consecuencia, S es un sistema de generadores para* $\mathbb{R}^3$.

Definición: Un espacio vectorial E se dice que es de tipo finito si existe un sistema de generadores para E con un número finito de elementos.

En lo sucesivo, sólo consideraremos espacios vectoriales de tipo finito.

Dependencia e independencia lineal

Definición: Se dice que un sistema de n vectores de un espacio vectorial E es ligado o que constituyen un sistema de vectores linealmente dependientes si existe al menos uno de ellos que sea combinación lineal del resto.

En caso contrario se dice que el sistema es libre o que los n vectores son linealmente independientes.

Teorema (Caracterización de los sistemas ligados):
El sistema $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$, formado por n vectores de un espacio vectorial E, es un sistema ligado si podemos encontrar una combinación lineal $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n = 0$ con algún $\alpha_i \neq 0$.
Demostración:
Supongamos que el sistema es ligado; entonces, al menos uno de sus vectores es combinación lineal del resto, por ejemplo e_1. Entonces podemos escribir $e_1 = \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$ para ciertos $\alpha_i \in \mathbb{R}$, de donde se deduce que $1 \cdot e_1 - \alpha_2 \cdot e_2 - \alpha_3 \cdot e_3 - \cdots - \alpha_n \cdot e_n = 0$, expresión que tiene al menos un escalar no nulo.

Recíprocamente, supongamos que en la relación $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n = 0$ existe algún $\alpha_i \neq 0$, por ejemplo $\alpha_1 \neq 0$ (si no, reordenamos el sistema). Como $\alpha_1 \neq 0$, existe su inverso y multiplicando por él la relación anterior, queda:

$$\frac{1}{\alpha_1} \cdot \left(\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n \right) = \frac{1}{\alpha_1} \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad e_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot e_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot e_3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot e_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot e_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot e_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot e_n$$

y, por tanto, el vector e_1 se expresa como combinación lineal del resto, con lo que el sistema es ligado.

Proposición:
- El vector nulo depende linealmente de cualquier sistema de vectores.
- Cualquier vector no nulo forma un sistema libre.
- Cualquier sistema de vectores que contenga al vector nulo es un sistema ligado.
- Cualquier sistema que tenga dos vectores iguales es un sistema ligado.
- Cualquier sistema que tenga dos vectores proporcionales es un sistema ligado.
- Cualquier sistema de vectores que se obtenga añadiendo nuevos vectores a un sistema ligado es también un sistema ligado.

La demostración de esta proposición se propone como ejercicio.

Ejemplos:
- ✓ Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el sistema $S = \{e_1 = (1,0,1),\ e_2 = (0,1,-1),\ e_3 = (2,3,-1)\}$. Veamos que S es ligado.

Formamos la combinación lineal $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = 0$ que equivale a:

$\alpha_1 \cdot (1,0,1) + \alpha_2 \cdot (0,1,-1) + \alpha_3 \cdot (2,3,-1) = (0,0,0)$, o lo que es lo mismo:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_3,\ \alpha_2 + 3\alpha_3,\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = (0,0,0) \ \Rightarrow \ \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -3\alpha_3 \end{cases}$$

Con lo que el sistema tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor que demos a α_3. Por ejemplo, si $\alpha_3 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = -3$, $\alpha_1 = -2$, con lo que el sistema es ligado y una relación de dependencia lineal sería $-2e_1 - 3e_2 + e_3 = 0$, es decir, $e_3 = 2e_1 + 3e_2$.

- ✓ Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el sistema $S=\{e_1=(1,-1,1)\ ,\ e_2=(0,1,-1)\ ,\ e_3=(1,0,-1)\}$. Veamos que S es libre.

Formamos la combinación lineal $\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\alpha_3\cdot e_3=0$ que equivale a:

$\alpha_1\cdot(1,-1,1)+\alpha_2\cdot(0,1,-1)+\alpha_3\cdot(1,0,-1)=(0,0,0)$, o lo que es lo mismo:

$$(\alpha_1+\alpha_3\,,-\alpha_1+\alpha_2\,,\,\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)=(0,0,0)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}$$

Con lo que la única posibilidad de formar una combinación lineal nula es con $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ y, concluimos que, el sistema es libre.

- ✓ Sea $S=\{e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\}$ un sistema libre de $\mathbb{R}^3$.

  Demostrar que $S'=\{u_1=e_2+e_3\,,\,u_2=e_1+e_3\,,\,u_3=e_1+e_2\}$ es libre.

Formamos la combinación lineal $\alpha_1\cdot u_1+\alpha_2\cdot u_2+\alpha_3\cdot u_3=0$ que equivale a:

$$\alpha_1\cdot(e_2+e_3)+\alpha_2\cdot(e_1+e_3)+\alpha_3\cdot(e_1+e_2)=0\ \Rightarrow\ (\alpha_2+\alpha_3)\cdot e_1+(\alpha_1+\alpha_3)\cdot e_2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot e_3=0\ \Rightarrow$$

$$\textit{como}\ \ S=\{e_1,e_2,e_3\}\ \textit{es libre}\ \Rightarrow\begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}\Rightarrow\ \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0\ \Rightarrow\ S'=\{u_1\,,\,u_2\,,\,u_3\}\ \textit{es libre.}$$

Base y dimensión de un espacio vectorial

Definición: Un sistema de vectores $B=\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_n\}$ de un espacio vectorial E es una base de E cuando cualquier vector v de E se expresa de forma **única** como combinación lineal de los elementos de B, $v=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\alpha_3\cdot e_3+\dots+\alpha_n\cdot e_n$ para ciertos escalares $\alpha_i\in\mathbb{R}$.

A los escalares ordenados $(\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3,\dots,\,\alpha_n)$ se los llama coordenadas de v respecto de la base B.

A continuación enunciamos un teorema que permite distinguir si un sistema de vectores es base de un espacio vectorial de una forma más operativa.

Teorema (de caracterización de bases):
Un sistema de vectores $B=\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_n\}$ de un espacio vectorial E es una base si y sólo si B es un sistema de generadores para E y además es un sistema libre.

Demostración:

Supongamos que B es una base. Es evidente que B es un sistema de generadores por la propia definición de base. Como todo vector v de E se escribe de manera única como combinación lineal de vectores de B, en particular el vector nulo se escribe $0=0\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+\dots+0\cdot e_n$ y como esta forma debe ser única, si tenemos $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n = 0$, por fuerza tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$ y entonces el sistema B es libre.

Recíprocamente, si B es sistema de generadores, todo vector $v \in E$ se puede expresar así $v = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$ para ciertos escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Veamos que esta expresión es única. Si v se pudiese expresar de dos formas distintas, como combinación lineal de elementos de B:

$v = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n \;\; ; \;\; \alpha_i \in \mathbb{R}$

$v = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \beta_3 \cdot e_3 + \cdots + \beta_n \cdot e_n \;\; ; \;\; \beta_i \in \mathbb{R}$

Restando miembro a miembro tenemos:

$0 = v - v = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot e_2 + (\alpha_3 - \beta_3) \cdot e_3 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot e_n$

y como $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es libre, se deduce

$(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_3 - \beta_3) = \cdots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$, es decir, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$, con lo que la expresión de v en el sistema B es única y en consecuencia B es base.

Ejemplo:

- ✓ Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el sistema $S = \{e_1 = (0,1,1) \,,\; e_2 = (1,0,1) \,,\; e_3 = (1,1,0)\}$. Veamos que S es base de $\mathbb{R}^3$.

S es sistema de generadores: sea $u \in \mathbb{R}^3$, $u = (x, y, z)$, comprobemos que puede ponerse como combinación lineal de los elementos de S.

$u = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 \;\; \Rightarrow \;\; (x, y, z) = \alpha_1 \cdot (0,1,1) + \alpha_2 \cdot (1,0,1) + \alpha_3 \cdot (1,1,0)$ entonces

$$(x, y, z) = (\alpha_2 + \alpha_3 \,,\, \alpha_1 + \alpha_3 \,,\, \alpha_1 + \alpha_2) \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 = z \end{cases} \;\; \Rightarrow \;\; \left\{ \alpha_1 = \frac{y + z - x}{2} \;,\; \alpha_2 = \frac{x - y + z}{2} \;,\; \alpha_3 = \frac{x + y - z}{2} \right.$$

por tanto $u = (x, y, z) = \dfrac{y + z - x}{2} \cdot e_1 + \dfrac{x - y + z}{2} \cdot e_2 + \dfrac{x + y - z}{2} \cdot e_3$ y S es sistema de generadores.

S es sistema libre: formamos la combinación lineal $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = 0$ que equivale a:

$\alpha_1 \cdot (0,1,1) + \alpha_2 \cdot (1,0,1) + \alpha_3 \cdot (1,1,0) = (0,0,0)$, o lo que es lo mismo:

$$(\alpha_2 + \alpha_3 \,,\, \alpha_1 + \alpha_3 \,,\, \alpha_1 + \alpha_2) = (0,0,0) \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Entonces, la única posibilidad de formar una combinación lineal nula es con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, el sistema es libre y constituye una base de $\mathbb{R}^3$.

La expresión $u = (x, y, z) = \dfrac{y + z - x}{2} \cdot e_1 + \dfrac{x - y + z}{2} \cdot e_2 + \dfrac{x + y - z}{2} \cdot e_3$ nos permite calcular, directamente, las coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ en la base S, por ejemplo si $u = (2, -3, 4)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $u = \dfrac{-3 + 4 - 2}{2} \cdot e_1 + \dfrac{2 + 3 + 4}{2} \cdot e_2 + \dfrac{2 - 3 - 4}{2} \cdot e_3$ y $u = \dfrac{-1}{2} \cdot e_1 + \dfrac{9}{2} \cdot e_2 + \dfrac{-5}{2} \cdot e_3$, con lo que $u = \left(-\dfrac{1}{2} \,,\, \dfrac{9}{2} \,,\, -\dfrac{5}{2} \right)$ en la base S.

Los espacios vectoriales de tipo finito poseen por lo menos una base. Si alguno tiene dos bases, éstas tienen el mismo número de elementos. Ambas cosas suceden en todos los casos como prueban los siguientes teoremas.

<u>Teorema</u> (de existencia de base):
Cualquier espacio vectorial de tipo finito E que no se reduce al vector nulo posee, al menos, una base.

Demostración:
Sea $S=\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k\}$ un sistema de generadores de E. Como E no es el espacio nulo, existe al menos un vector no nulo en S; por tanto, existen subconjuntos de S que son libres.
Si suponemos que S es ligado, entonces se verifica que $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_k \cdot e_k = 0$, con algún $\alpha_i \neq 0$. Supongamos que $\alpha_k \neq 0$ (si no, reordenamos el sistema de tal forma que el último escalar sea distinto de cero).
Entonces $e_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \cdot e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} \cdot e_2 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \cdot e_{k-1}$, como cualquier vector de E se puede escribir como combinación lineal de $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k\}$, y e_k se escribe como combinación lineal de $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}\}$, éste último conjunto, $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}\}$ genera E.
Si el conjunto $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}\}$ es ligado podemos proceder de igual modo para reducir en uno el número de vectores generadores. Este proceso debe continuar hasta conseguir un subconjunto de S que sea libre, subconjunto que posee al menos un vector por ser el espacio E no nulo, y que será ya una base de E.

<u>Teorema</u> (de la base):
En un espacio vectorial E de tipo finito todas las bases tienen el mismo número de elementos.

La demostración de este teorema se apoya en dos resultados previos:

<u>Lema</u>:
Sea $B=\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ una base de E y sea u un vector de E, $u = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$. Si $\alpha_i \neq 0$, entonces en la base B se puede sustituir el vector e_i por el vector u de tal manera que el conjunto resultante sigue siendo base de E.

Demostración:
Supongamos que el escalar distinto de cero es el primero, si no reordenamos la base, $\alpha_1 \neq 0$. Veamos que $B' = \{u, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es base de E.

B' es sistema de generadores: Es suficiente con ver que los vectores de B se pueden poner como combinación lineal de los vectores de B'. Esto es claro para los vectores $e_2, e_3, \ldots, e_n$, veámoslo para e_1.
Como $u = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$ y $\alpha_1 \neq 0$ entonces se tiene que:
$e_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot u - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot e_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot e_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot e_n$, con lo que e_1 se expresa como combinación lineal de los vectores de B'.

B' es libre: Dada cualquier relación $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = 0$, veamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot (\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n) + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = 0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1\alpha_1) \cdot e_1 + (\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2) \cdot e_2 + \cdots + (\lambda_1\alpha_3 + \lambda_3) \cdot e_n = 0$. Como B es base, cualquier combinación lineal nula de los elementos de B obliga a que los escalares sean todos cero. Entonces tenemos:

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad como \;\; \alpha_1 \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1\alpha_n + \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$$ Por tanto B' es base.

<u>Teorema de Steinitz</u> (o de la base incompleta):
Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ una base de E y sea $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k\}$ un sistema libre de vectores de E. Entonces se cumple que $k \leq n$ y, pueden elegirse convenientemente $(n-k)$ vectores de la base B de tal manera que añadidos al conjunto $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k\}$ forman una nueva base de E.

Demostración:

Como $u_1 \in E$, entonces $u_1 = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$ con algún $\alpha_i \neq 0$ (no pueden ser nulos todos los α_i porque sería $u_1 = 0$, y el sistema $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k\}$ no sería libre)
Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$; si no fuese así reordenaríamos los vectores de la base. Entonces basándonos en el Lema anterior, se deduce que $B_1 = \{u_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es base de E.

Como $u_2 \in E$, entonces $u_2 = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \cdots + \beta_n \cdot e_n$ donde los escalares $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ no pueden ser todos cero simultáneamente pues tendríamos que u_1 y u_2 serían linealmente dependientes. Por tanto algún $\beta_i \neq 0$ para $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Supongamos que $\beta_2 \neq 0$. Aplicando de nuevo el Lema se obtiene que $B_2 = \{u_1, u_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es base de E.

Se repite sucesivamente el proceso hasta sustituir todos los vectores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$. Es claro que $k \leq n$, pues si fuese $k > n$, una vez sustituidos todos los vectores u_i posibles, obtendríamos $B_n = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$, base de E, y los vectores $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_k$ serían combinación lineal de los n primeros, lo cual contradice el hecho de que $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k\}$ sea un sistema libre.

Por tanto $k \leq n$ y, después de sustituir k de los n vectores de B por los k vectores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$, se obtiene el sistema $B_k = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-k}}\}$ que es base de E.

Demostración del teorema de la base:

Supongamos que $B_n = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ y $B_m = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m\}$ son dos bases de un espacio vectorial E. Tomando B_n como base y B_m como sistema libre y aplicando el teorema de Steinitz se verifica que $m \leq n$. Tomando después B_m como base y B_n como sistema libre y aplicando de nuevo el teorema de Steinitz se verifica que $n \leq m$.

Por tanto $m = n$, y ambas bases tienen el mismo número de elementos.

Definición: Se llama dimensión de un espacio vectorial E de tipo finito al número de elementos de cualquiera de sus bases y se denota por $\dim E$.

Corolario 1:
Si E es un espacio vectorial de dimensión n, entonces toda colección de n vectores de E que sean linealmente independientes entre sí constituyen una base de E.

Demostración:

Consecuencia inmediata del teorema de Steinitz.

Corolario 2:
En un espacio vectorial E de dimensión n se verifica que todo conjunto de m vectores, con $m > n$, es ligado.

Demostración:

Si fuese libre, por el teorema de Steinitz, debería ser $m \leq n$.