DETERMINANTES

Definición.

Trataremos de dar una definición rigurosa del concepto de determinante de una matriz cuadrada de orden n. Intuitivamente, podemos decir que un determinante es un número real que se asigna a una matriz cuadrada y que se obtiene como la suma (o resta) de todos los posibles productos de n elementos de la matriz, de tal forma que no hay dos que estén en la misma fila ni en la misma columna.

Denotaremos al determinante de una matriz $A \in M_{n\times n}$ como $|A|$ o $det(A)$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$; veamos cómo podemos encontrar todos los posibles productos de n elementos de la matriz de forma que éstos pertenezcan a filas y columnas diferentes.

Uno de esos productos es $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots\ldots \cdot a_{nn}$, puesto que no hay dos elementos de la misma fila ni de la misma columna. Si mantenemos los elementos ordenados por la fila a la que pertenecen y permutamos las columnas, obtendremos otros productos con la misma condición, por ejemplo $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot \ldots\ldots \cdot a_{nn}$. De esta forma, deducimos que hay tantos productos como permutaciones de n elementos, es decir, $n!$ productos posibles, uno para cada permutación.

<u>Definición:</u>

Dada una matriz $A \in M_{n\times n}$, definimos el determinante de A como el número real que se obtiene de la siguiente manera: $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\nu(\sigma)} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$

Vemos que cada sumando tiene n factores, elementos de la matriz, de manera que sólo uno es de cada fila y sólo uno es de cada columna. Además, como el conjunto de las permutaciones de n elementos, S_n, tiene $n!$ elementos, el desarrollo de $|A|$ tiene $n!$ sumandos, corregidos en el signo por el factor $(-1)^{\nu(\sigma)}$.

$\nu(\sigma)$ es el número de inversiones de la permutación σ, que se obtiene comparando cada elemento con los que le siguen y viendo cuántos de esos pares están colocados en orden inverso al natural. Ejemplo:

$\{1,2,3,4\} \xrightarrow{\sigma} \{2,3,1,4\} \quad \nu(\sigma) = 2$; esta permutación tiene dos inversiones porque hay dos pares de elementos colocados en orden inverso al natural, el 2 con el 1 y el 3 con el 1.

Apliquemos la definición de determinante a dos casos particulares:

Determinantes de orden 2 y de orden 3.

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tenemos que $|A|=\sum_{\sigma\in S_2}(-1)^{\nu(\sigma)}\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}$

El conjunto S_2 está formado por $2!=2$ permutaciones: $\left|\begin{array}{l} \{1,2\}\xrightarrow{\sigma_1}\{1,2\} \;;\; \nu(\sigma_1)=0 \\ \{1,2\}\xrightarrow{\sigma_2}\{2,1\} \;;\; \nu(\sigma_2)=1 \end{array}\right.$, entonces, según la definición:

$$|A|=(-1)^{\nu(\sigma_1)}\cdot a_{1\sigma_1(1)}\cdot a_{2\sigma_1(2)}+(-1)^{\nu(\sigma_2)}\cdot a_{1\sigma_2(1)}\cdot a_{2\sigma_2(2)}=(-1)^0\cdot a_{11}\cdot a_{22}+(-1)^1\cdot a_{12}\cdot a_{21}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-2\cdot(-1)=14 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-2\cdot(-5)=4$$

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tenemos que $|A|=\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\nu(\sigma)}\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}$

El conjunto S_3 está formado por $3!=6$ permutaciones:

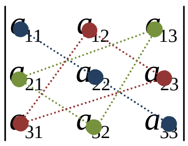
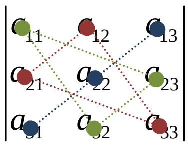
$\left|\begin{array}{ll} \{1,2,3\}\xrightarrow{\sigma_1}\{1,2,3\} \;;\; \nu(\sigma_1)=0 & \{1,2,3\}\xrightarrow{\sigma_4}\{2,3,1\} \;;\; \nu(\sigma_4)=2 \\ \{1,2,3\}\xrightarrow{\sigma_2}\{1,3,2\} \;;\; \nu(\sigma_2)=1 & \{1,2,3\}\xrightarrow{\sigma_5}\{3,1,2\} \;;\; \nu(\sigma_5)=2 \\ \{1,2,3\}\xrightarrow{\sigma_3}\{2,1,3\} \;;\; \nu(\sigma_3)=1 & \{1,2,3\}\xrightarrow{\sigma_6}\{3,2,1\} \;;\; \nu(\sigma_6)=3 \end{array}\right.$, entonces, según la definición:

$$\begin{aligned}|A|=&(-1)^{\nu(\sigma_1)}\cdot a_{1\sigma_1(1)}\cdot a_{2\sigma_1(2)}\cdot a_{3\sigma_1(3)}+(-1)^{\nu(\sigma_2)}\cdot a_{1\sigma_2(1)}\cdot a_{2\sigma_2(2)}\cdot a_{3\sigma_1(3)}+(-1)^{\nu(\sigma_3)}\cdot a_{1\sigma_3(1)}\cdot a_{2\sigma_3(2)}\cdot a_{3\sigma_3(3)}+\\ &+(-1)^{\nu(\sigma_4)}\cdot a_{1\sigma_4(1)}\cdot a_{2\sigma_4(2)}\cdot a_{3\sigma_4(3)}+(-1)^{\nu(\sigma_5)}\cdot a_{1\sigma_5(1)}\cdot a_{2\sigma_5(2)}\cdot a_{3\sigma_5(3)}+(-1)^{\nu(\sigma_6)}\cdot a_{1\sigma_6(1)}\cdot a_{2\sigma_6(2)}\cdot a_{3\sigma_6(3)}\end{aligned}$$

Como $(-1)^{\nu(\sigma_1)}=(-1)^{\nu(\sigma_4)}=(-1)^{\nu(\sigma_5)}=1$ y $(-1)^{\nu(\sigma_2)}=(-1)^{\nu(\sigma_3)}=(-1)^{\nu(\sigma_6)}=-1$, tenemos que $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$, y reordenando, nos queda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - \left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\right)$$

Una forma de recordar estos seis productos es utilizar la regla de Sarrus que sigue el siguiente esquema:


con el signo que corresponda y

con el signo cambiado.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 60 + 0 - (8 + 9 + 0) = 31$$

Después de todo lo visto, nos debe quedar claro que el cálculo de determinantes de matrices cuadradas de orden superior a 3, es inviable a partir de la definición de determinante. Para una matriz de orden 4, deberíamos memorizar 24 productos de 4 elementos, para una matriz de orden 5, serían 120 productos de 5 elementos, para una matriz de orden 6, 720 productos de 6 elementos, etc.

Es necesario profundizar en las propiedades de los determinantes para facilitar su cálculo.

Propiedades básicas de los determinantes.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden n, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si la matriz A es diagonal, $|A|$ es el producto de los elementos de la diagonal principal.

2. Si la matriz A es triangular, $|A|$ es el producto de los elementos de la diagonal principal.

3. El determinante de una matriz y el de su traspuesta, coinciden. $|A| = |A^T|$.

4. Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de la matriz A son nulos, entonces $|A| = 0$.

5. Si multiplicamos (o dividimos) por un mismo número todos los elementos de una línea de la matriz A, el determinante queda multiplicado (o dividido) por dicho número.

6. Si se permutan entre sí dos líneas de una matriz, su determinante sólo cambia de signo.

7. Si la matriz A tiene dos líneas iguales, $|A|=0$.

8. Si la matriz A tiene dos líneas proporcionales, $|A|=0$.

9. Si cada elemento de una determinada línea se expresa como suma de varios sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes de las matrices que se van formando al sustituir dicha línea, por los primeros, segundos, …, sumandos. Es decir, si suponemos que la línea en cuestión es la segunda fila, tenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

10. Si en una matriz A, se sustituye una fila (o columna) por ella misma, más una combinación lineal del resto de filas (o, en su caso, de columnas), el determinante no cambia.

11. Si en una matriz A, una fila (o columna) es combinación lineal del resto de filas (o columnas), el determinante de A es cero.

12. El determinante de un producto de matrices cuadradas coincide con el producto de los determinantes de ambas matrices. Es decir, si $A,B\in M_{n\times n} \Rightarrow |AB|=|A|\cdot|B|$

Desarrollo de un determinante por elementos de una línea.

Definición:

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden n, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} y se denota por α_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j en la matriz A.

Se llama **adjunto** del elemento a_{ij} y se denota por A_{ij}, al número real que obtiene como $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

El menor complementario del elemento a_{32}, es $\alpha_{32}=\begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4+90+18=112$, y el adjunto del elemento a_{32}, es $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\alpha_{32}=(-1)\cdot 112=-112$.

El menor complementario del elemento a_{24}, es $\alpha_{24}=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=24-12+54-2=64$, y el adjunto del elemento a_{24}, es $A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\alpha_{24}=(+1)\cdot 64=64$.

<u>Teorema 1:</u>

El determinante de una matriz cuadrada de orden n, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera, multiplicados por sus correspondientes adjuntos, es decir:

$|A|=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+\dots\dots+a_{1n}\cdot A_{1n}$, desarrollo por los elementos de la primera fila.

$|A|=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+a_{i3}\cdot A_{i3}+\dots\dots+a_{in}\cdot A_{in}$, desarrollo por los elementos de la fila i-ésima.

$|A|=a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+a_{3j}\cdot A_{3j}+\dots\dots+a_{nj}\cdot A_{nj}$, desarrollo por los elementos de la columna j-ésima.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculemos $|A|$ utilizando el teorema anterior. Desarrollando por la fila 1:

$$|A|=(-1)\cdot A_{11}+4\cdot A_{12}+6\cdot A_{13}+3\cdot A_{14}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}+6\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot[-2-4+10-12]-4\cdot[-6+15+8]+6\cdot[20+3+45-4]-3\cdot[-8-3-18]=8-68+384+87=411$$

Si ahora desarrollamos por la columna 1:

$$|A|=(-1)\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+2\cdot A_{31}+3\cdot A_{41}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&-2&5\\-3&-1&1\\2&0&2\end{vmatrix}+0+2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4&6&3\\1&-2&5\\2&0&2\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}4&6&3\\1&-2&5\\-3&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot[-2-4+10-12]+2\cdot[-16+60+12-12]-3\cdot[-8-3-90-18+20-6]=8+88+315=411$$

Como la columna 1 tiene un elemento que es cero, sólo hemos tenido que calcular tres determinantes de orden 3. Por tanto, cuantos más ceros haya en una línea, más sencillo es el cálculo del determinante.

Vamos a aprovechar la propiedad número 10, "Si en una matriz A, se sustituye una fila (o columna) por ella misma, más una combinación lineal del resto de filas (o, en su caso, de columnas), el determinante no cambia.", para conseguir más ceros en alguna línea y así, por ejemplo, tendremos:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&4&6&3\\0&1&-2&5\\2&-3&-1&1\\3&2&0&2\end{vmatrix}_{\substack{F_3=F_3+2F_1\\F_4=F_4+3F_1}}=\begin{vmatrix}-1&4&6&3\\0&1&-2&5\\0&5&11&7\\0&14&18&11\end{vmatrix}=(-1)\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&-2&5\\5&11&7\\14&18&11\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot[121+450-196-770-126+110]=411$$

Este método permite rebajar el orden de un determinante en un grado. En general, si se tiene un determinante de orden n, utilizando la propiedad 10 y el teorema anterior, se reduce su cálculo a otro de orden $n-1$, y, a su vez, éste a otro de orden $n-2$, así hasta llegar a uno de orden 3 que ya se puede calcular usando la regla de Sarrus o reducir a uno de orden 2.

Menor de orden k de una matriz A.

Definición:

Si de una matriz A de orden $n\times m$, se toman k filas y k columnas de manera que podemos formar con ellas una matriz cuadrada, su determinante se llama menor de orden k de la matriz A.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix}1&0&5&3&-3&1\\0&-2&3&2&0&0\\-1&1&-2&4&6&2\\2&3&0&1&-1&2\end{pmatrix}$, si tomamos las filas F_1,F_3 y las columnas C_2,C_5, se obtiene el menor de orden 2: $\begin{vmatrix}0&-3\\1&6\end{vmatrix}=3$. Si tomamos las filas F_1,F_2,F_4 y las columnas C_2,C_3,C_6, se obtiene el menor de orden 3: $\begin{vmatrix}0&5&1\\-2&3&0\\3&0&2\end{vmatrix}=11$. Si tomamos las filas F_1,F_2,F_3,F_4 y las columnas C_1,C_2,C_5,C_6, se obtiene el menor de orden 4: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 30$. La matriz A no tiene menores de orden superior a 4.

Definición:

Se llama menor principal de una matriz, a todo menor no nulo de orden k, siendo nulos todos los posibles menores, si es que existen, de orden superior a k.

En el ejemplo anterior, el menor de orden 4 es un menor principal de la matriz A.

Si tenemos que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$ es un menor principal de la matriz B porque, como se puede comprobar, todos los posibles menores de orden 3 de dicha matriz son nulos.

El siguiente teorema tiene gran importancia en el Álgebra Lineal porque relaciona los conceptos de dependencia lineal, matriz y determinante. Será el paso previo a otros dos teoremas fundamentales en esta teoría: la caracterización de determinantes nulos y el cálculo de rangos por determinantes.

Teorema 2:

Sea A' la matriz correspondiente a un menor principal de orden k, de una matriz A; cada una de las líneas que no figuren en A' es una combinación lineal de las k líneas de A', las cuales son linealmente independientes entre sí.

Ejemplo:

En la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$ es un menor principal, por tanto, las filas F_1, F_2 son linealmente independientes y la fila F_3 será combinación lineal de F_1 y F_2. Del mismo modo, las columnas C_1, C_2 son linealmente independientes y el resto de columnas, C_3, C_4, C_5, son combinación lineal de C_1 y C_2.

Teorema 3:

La condición necesaria y suficiente para que el determinante de una matriz A sea cero es que las filas o columnas de la matriz sean linealmente dependientes entre sí, es decir, que alguna sea combinación lineal del resto.

Este teorema completa la propiedad 11, que nos decía: "*Si en una matriz A, una fila (o columna) es combinación lineal del resto de filas (o columnas), el determinante de A es cero.*" Ahora se añade: si $|A|=0$, podemos asegurar que las filas y las columnas de la matriz A son linealmente dependientes.

Rango de una matriz por determinantes.

Teorema 4:
El rango por filas de una matriz A coincide con el rango por columnas y con el orden de cualquier menor principal de la matriz.

Este teorema es consecuencia directa del teorema 2 que nos asegura que las filas y las columnas que no están contenidas en un menor principal, son combinación lineal de las filas y columnas que figuran en dicho menor y éstas son linealmente independientes entre sí, por tanto, en la matriz A existe el mismo número de filas que de columnas linealmente independientes entre sí, exactamente tantas como el orden de un menor principal de A.

Proposición:
Si todos los menores de orden k de una matriz A son nulos, también lo son los de orden $k+1$.

De todo lo visto se puede deducir la siguiente regla práctica para calcular el rango de una matriz mediante determinantes:

Si a simple vista se descubre alguna línea que sea combinación lineal de las otras, se prescinde de ella, en caso contrario, se trabaja con toda la matriz de acuerdo con el siguiente método:

- La única matriz de rango 0 es la matriz nula.
- Si la matriz tiene elementos diferentes de cero, su rango será mayor o igual que 1.
- Se busca un menor de orden 2 distinto de cero y, en caso de encontrarlo, procedemos a orlar la matriz correspondiente a dicho menor con una determinada fila y cada una de las columnas que no figuran en él. Si los determinantes que se forman así son todos nulos, entonces la fila es combinación lineal de las dos filas que figuran en el menor y, por tanto, se puede prescindir de ella. Seguimos el mismo procedimiento con las demás filas. Si todos los determinantes de orden 3 que podemos formar de esta manera son nulos, la matriz sólo tendría 2 filas y 2 columnas linealmente independientes y su rango sería 2. En el caso de encontrar un menor de orden 3 diferente de cero, procederíamos a orlar la matriz de dicho menor, de la forma expuesta anteriormente y si incluir las filas desechadas. Siguiendo el proceso, cuando todos los determinantes de orden $k+1$, formados a partir de un menor de orden k no nulo, son cero, podemos asegurar que la matriz A tiene rango k.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & -5 & 2 \\ 15 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Observamos que $C_5=C_3+C_4$, por lo que nos olvidamos de la columna 5.

Entonces $Rang\ A \leq 4$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y procedemos a orlar la matriz correspondiente a dicho menor: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$. Las tres primeras filas y las tres primeras columnas de la matriz A son linealmente independientes $\Rightarrow \quad 3 \leq Rang\ A \leq 4$.

Continuamos el proceso: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 0$. Como este determinante es cero, tenemos que la fila 4 es combinación lineal de las tres primeras. Veamos que ocurre con el último menor de orden 4 que nos queda por estudiar:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 15 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}_{F_4 = F_4 + F_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 16 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} -1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 16 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. La fila 5 también es combinación lineal de las tres primeras filas, por tanto $Rang\ A = 3$.

Inversa de una matriz por determinantes.

Sea una matriz cuadrada de orden n, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. La matriz inversa de A, si existe, debe ser una matriz cuadrada de orden n, $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Vamos a caracterizar las matrices cuadradas que tienen inversa y a dar un método para calcularla.

Lema:

En una matriz cuadrada, la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es cero, esto es:

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + a_{i3} \cdot A_{j3} + \dots\dots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0 \quad o \quad a_{1i} \cdot A_{1j} + a_{2i} \cdot A_{2j} + a_{3i} \cdot A_{3j} + \dots\dots + a_{ni} \cdot A_{nj} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Demostración:

Si una matriz cuadrada tiene dos filas iguales, la i-ésima y la j-ésima, al desarrollar el determinante de esta matriz por la fila j-ésima, tendríamos: $|A| = a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + a_{i3}\cdot A_{j3} + \ldots\ldots + a_{in}\cdot A_{jn}$. Como la matriz A tiene dos filas iguales, sabemos que $|A| = 0$ y, por tanto, $a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + a_{i3}\cdot A_{j3} + \ldots\ldots + a_{in}\cdot A_{jn} = 0$.

Del mismo modo se demuestra para columnas.

<u>Teorema 5:</u>

Una matriz cuadrada A de orden n tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$; y es ese caso A^{-1} es:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, es decir, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj\left(A^T\right)$, siendo $Adj\left(A^T\right)$ la matriz adjunta de A^T que es la matriz que se obtiene sustituyendo cada elemento a_{ij} de A^T por su adjunto A_{ij}.

Así mismo, se verifica que $Adj\left(A^T\right) = \left[Adj\left(A\right)\right]^T$.

Demostración:

Si existe A^{-1}, se verifica $A^{-1}\cdot A = I_n$ y $\left|A^{-1}\cdot A\right| = |I_n| = 1 \;\Rightarrow\; \left|A^{-1}\right|\cdot|A| = 1 \;\Rightarrow\; |A| \neq 0$

Si $|A| \neq 0$, existe la matriz $\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ que al multiplicarla por la matriz A cumple:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + \cdots + a_{1n}\cdot A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{11}\cdot A_{21} + a_{12}\cdot A_{22} + \cdots + a_{1n}\cdot A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{a_{11}\cdot A_{n1} + a_{12}\cdot A_{n2} + \cdots + a_{1n}\cdot A_{nn}}{|A|} \\ \frac{a_{21}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{12} + \cdots + a_{2n}\cdot A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + \cdots + a_{2n}\cdot A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{a_{21}\cdot A_{n1} + a_{22}\cdot A_{n2} + \cdots + a_{2n}\cdot A_{nn}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}\cdot A_{11} + a_{n2}\cdot A_{12} + \cdots + a_{nn}\cdot A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{n1}\cdot A_{21} + a_{n2}\cdot A_{22} + \cdots + a_{nn}\cdot A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{a_{n1}\cdot A_{n1} + a_{n2}\cdot A_{n2} + \cdots + a_{nn}\cdot A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{|A|}{|A|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} x & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -x \\ -2 & x & 1 \end{pmatrix}$, determina para qué valores de x admite inversa. Halla A^{-1} para $x=-1$.

Calculamos $|A|=\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -x \\ -2 & x & 1 \end{vmatrix}=x^3-3x+2 \;\Rightarrow\; |A|=0$ cuando $x^3-3x+2=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$.

Entonces, la matriz A admite inversa siempre que $x\neq 1$ y $x\neq 2$.

Calculemos A^{-1} para $x=-1$. Tenemos que $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A|=4$. Buscamos los adjuntos de los elementos de A y los vamos colocando en orden traspuesto:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-4 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3 \qquad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-4 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=3 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=5$$

Lo comprobamos: $A^{-1}\cdot A=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De igual modo se puede comprobar que $A\cdot A^{-1}=I_3$